

Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg



Fakultät für Informatik  
Institut für Simulation und Graphik

## Diplomarbeit

### **Anwendung des Hidden Markov Modell-Ansatzes auf die Proxel-basierte Simulation**

Verfasser:

Thomas Simon

31. Juli 2005

Betreuer:

Prof. Dr. Graham Horton (Universität Magdeburg)

Prof. Dr. Rudolf Kruse (Universität Magdeburg)

Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg  
Fakultät für Informatik  
Institut für Simulation und Graphik  
Universitätsplatz 2  
39106 Magdeburg

**Thomas Simon**

*Anwendung des Hidden Markov Modell-Ansatzes auf die Prozel-basierte Simulation*

Studienarbeit, Otto-von-Guericke-Universität

Magdeburg, 2005.

# Inhaltsverzeichnis

<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>iv</b>
<b>Verzeichnis der Abkürzungen</b>	<b>v</b>
<b>1 Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1 Inhalt der Arbeit . . . . .	1
1.2 Motivation . . . . .	2
1.3 Ziele und Erwartungen . . . . .	3
1.4 Arbeitsplan . . . . .	4
<b>2 Grundlagen</b>	<b>5</b>
2.1 Analyse stochastischer Prozesse . . . . .	5
2.1.1 Stochastische Petri Netze . . . . .	5
2.2 Das Proxelverfahren . . . . .	7
2.2.1 Allgemeine Proxel-basierte Simulation . . . . .	7
2.3 Analyse von Hidden Markov Modellen . . . . .	10
2.3.1 Was sind Hidden Markov Modelle . . . . .	11
2.3.2 Die 3 Analyseverfahren der Hidden Markov Modelle . . . . .	14
2.4 Zusammenhang zwischen SPN und HMM . . . . .	21
<b>3 Anpassung des Proxelalgorithmus</b>	<b>23</b>
3.1 Aufgaben und deren Realisierung . . . . .	23
3.1.1 Erwartungen an die Implementierung und an die angepassten Analyseverfahren . . . . .	23
3.1.2 Basis und Vorbereitung der Analyse . . . . .	24
3.1.3 Wahrscheinlichkeit einer Beobachtungsfolge . . . . .	26

3.1.4	Berechnung des maximal wahrscheinlichsten Pfades . . . . .	29
3.2	Erweiterung des Proxelalgorithmus . . . . .	30
3.2.1	Auswirkungen der Adaption auf das Proxelverfahren . . . . .	32
3.3	Was wurde durch die Anpassungen erreicht . . . . .	33
<b>4</b>	<b>Experimente und Anwendungsgebiete</b>	<b>36</b>
4.1	Anwendungsbeispiel für Signalmodelle . . . . .	36
4.2	Parameter der Untersuchungen . . . . .	37
4.3	Experimente und Einflussfaktoren für Signalmodellen . . . . .	38
4.3.1	Erwartungen an die Werte der Ergebnisse . . . . .	39
4.3.2	Experiment 1 . . . . .	40
4.3.3	Experiment 2 . . . . .	43
4.3.4	Experiment 3 . . . . .	45
4.3.5	Experiment 4 . . . . .	48
4.3.6	Experiment 5 . . . . .	50
4.4	Schlussfolgerungen der Experimente . . . . .	51
4.5	Ideen für erweiterte Analysen an Signalmodellen . . . . .	53
4.5.1	Analyse von Kurzfolgen . . . . .	54
4.5.2	Adaption der dritten Fragestellung der HMM . . . . .	56
<b>5</b>	<b>Reflexionen über die Arbeit</b>	<b>57</b>
5.1	Bewertung der Ziele . . . . .	57
5.2	offene Fragen . . . . .	58
5.3	Ausblicke . . . . .	59
<b>6</b>	<b>Anhang</b>	<b>61</b>
6.1	Beispiel zum Forward-Backward Algorithmus . . . . .	61
6.2	Beispiel zum Viterbi Algorithmus . . . . .	62
6.3	Ergebnisse der Berechnung von 5 Zeitschritten . . . . .	63
6.4	Variablen aus Abbildung 2.3 . . . . .	63
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>64</b>

# Abbildungsverzeichnis

2.1	Maschine arbeitet (OK), ist defekt (FAIL) oder wird gewartet (MAINT) . . . . .	6
2.2	Erreichbarkeitsgraph des SPN, in dem die Maschine arbeitet (OK), defekt ist (FAIL) oder gewartet wird (MAINT) . . . . .	8
2.3	Struktur des Proxelbaums zum beschriebenen Petri Netz (Markierung, $\tau_1$ , $\tau_2$ , Wahrscheinlichkeit des Proxel) . . . . .	9
2.4	mögliche zeitliche Erweiterungen für das Modell der Besuche in 3 verschiedenen Restaurants (C Chinese, I Italiener, G Grieche) . . . . .	11
2.5	zeitliche Reihenfolge der Messung von Temperaturen . . . . .	12
2.6	Bewölkungsmodell mit den zu beobachtenden Temperaturen ( $A \rightarrow 15^\circ\text{C}$ , $B \rightarrow 20^\circ\text{C}$ , $C \rightarrow 30^\circ\text{C}$ ) . . . . .	12
2.7	Visualisierung aller möglichen Entwicklungswege eines Modells mit N Zuständen . . . . .	15
2.8	Visualisierungen der Berechnungen der Forward- und Backward-Variablen	17
2.9	Illustration von $\epsilon_t(i, j)$ . . . . .	20
3.1	Beobachtungszeitpunkte aus einem Alphabet ( $O = (C, G, I)$ ) . . . . .	25
3.2	Diskretisierung der Beobachtungssequenz . . . . .	26
3.3	Petri Netz für das Restaurantbeispiel . . . . .	27
3.4	Entwicklungsweig mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.0 . . . . .	28
4.1	Repräsentation eines Projektplans durch ein Petri Netz . . . . .	36
4.2	Signalfolge der Meilensteine eines Projektverlaufs . . . . .	37
4.3	Modell in dem jeder Zustand durch jeden erreicht werden kann . . . . .	40
4.4	bearbeitete Proxel pro Zeitschritt für Experiment 1 (Variation der Anzahl der Symbole die pro Transition erzeugt werden können) . . . . .	42
4.5	Modell mit Alternativen aber gerichteten Entwicklungen . . . . .	43

4.6	bearbeitete Proxel pro Zeitschritt für Experiment 2 (Variation der Anzahl der Symbole die pro Transition erzeugt werden können) . . . . .	44
4.7	Modell mit mehreren nebenläufigen Teilprozessen . . . . .	45
4.8	bearbeitete Proxel pro Zeitschritt für Experiment 3 (Variation der Anzahl der Symbole die pro Transition erzeugt werden können) . . . . .	47
4.9	Modell mit wenigen Entwicklungsmöglichkeiten . . . . .	48
4.10	bearbeitete Proxel pro Zeitschritt für Experiment 4 und 1(mit 2 erreichbaren Folgezuständen) (Variation der Anzahl der Symbole die pro Transition erzeugt werden können) . . . . .	49
4.11	in der Spracherkennung genutztes left-right-Modell . . . . .	50
4.12	bearbeitete Proxel pro Zeitschritt für Experiment 5 (Variation der Anzahl der Symbole die pro Transition erzeugt werden können) . . . . .	51
4.13	SPN mit unendlichem Zustandsraum ( $Z$ ,Anzahl der Marken in $Z$ ) . . . . .	53
4.14	Ausgabemöglichkeiten von 3 unterschiedlichen Kurzfolgen in einem Proxelbaum . . . . .	55
6.1	Modell mit zwei Zuständen . . . . .	61

# Verzeichnis der Abkürzungen

<b>HMM</b>	Hidden Markov Modelle
<b>FBA</b>	Forward-Backward Algorithmus
<b>SV</b>	supplementary variables
<b>SPN</b>	stochastisches Petri Netz
<b>TSW</b>	Teilsequenzwahrscheinlichkeit

## Zusammenfassung

Mit Hidden Markov Modellen werden stochastische Prozesse abgebildet, die eine Reihe von Signalen ausgeben. Die gegenwärtig eingesetzten Analyseverfahren können nur exponentiell-verteilte Zustandsübergänge dieser Signalmodelle untersuchen. Ziel dieser Diplomarbeit ist es, auch allgemeine Verteilungsfunktionen für Signalmodelle verwenden und analysieren zu können. Dazu wurden Signalmodelle mit Hilfe von stochastischen Petri Netzen spezifiziert, die ebenfalls Signale erzeugen können. Das deterministische zustandsraum-basierte Proxelverfahren analysiert stochastische Petri Netze zeit-diskret und beliebig genau. Für die Betrachtung der Signalausgaben von Petri Netzen, wurde das Proxelverfahren angepasst. Die Diplomarbeit beschreibt die Umsetzung der ersten beiden Fragestellungen der Hidden Markov Modelle, mit Hilfe des Proxelverfahrens. In Experimenten wurden die Einflüsse der Parameter von Signalmodellen auf den Proxelalgorithmus untersucht und Schlussfolgerungen für die Anwendung der Methode auf Signalmodelle gezogen. Mit dem adaptierten Proxelverfahren können nun auch stochastische Petri Netze mit Signalausgaben auf zeit-diskrete Ausgabefolgen analysiert werden. Für diese Art der Abbildung von Signalmodellen, lassen sich allgemeine Verteilungsfunktionen verwenden. Daher ermöglicht dieser Ansatz, die Abbildung und Analyse vieler weiterer Klassen von stochastischen Signalprozessen, als bisher mit Hidden Markov Modellen möglich war.

## Abstract

Hidden Markov Models represent stochastic processes, which emit a sequence of signals. The analysis methods used at present can only examine signal models with exponentially distributed transitions. A goal of this Master thesis is to be able to use and to analyze general distribution functions within signal models. For that purpose signal models were modelled using stochastic Petri nets, which can also produce signals. The deterministic state space-based proxel method analyzes stochastic Petri nets in a time-discrete manner and arbitrarily exact. The proxel method was adapted to also consider signal outputs of Petri nets. The Master thesis describes the implementation of the first two questions of the Hidden Markov Models with the help of the proxel method. In experiments the influences of the signal model parameters on the proxel algorithm were examined and conclusions for the application of the method on signal models were drawn. With the adapted proxel method it is now possible to analyze stochastic Petri nets with signal outputs regarding time-discrete output sequences. For this kind of representation of signal models, general distribution functions can be used. Therefore this approach makes the modelling and analysis of many further classes of stochastic signal processes possible, than were possible using traditional Hidden Markov Models.



# 1 Einleitung

## 1.1 Inhalt der Arbeit

Die vorliegende Arbeit ist im Bereich der *zeit-diskreten, zustandsraum-basierten Simulation* einzuordnen. Sie dient zum Erlangen des akademischen Grades „Diplom-Informatiker“ und wurde unter Betreuung des Lehrstuhls für Simulation der Universität Magdeburg angefertigt.

Das Dokument gliedert sich in folgende Abschnitte: Im ersten Kapitel werden die Beweggründe für diese Arbeit erläutert. Eine Motivation gibt Aufschluß über die Einsatzmöglichkeiten von stochastischen Petri Netzen und Hidden Markov Modellen. Des Weiteren werden Ziele, die mit dieser Arbeit erreicht werden sollen, vorgestellt. Zusätzlich werden Erwartungen an die Umsetzung der Analyseverfahren der Hidden Markov Modelle auf stochastische Petri Netze formuliert. Abschließend beschreibt ein Arbeitsplan einzelne Schritte, die zum Erreichen der gesetzten Ziele wichtig waren.

Das Kapitel 2 beschreibt wichtige Grundlagen der Simulation stochastischer Prozesse. Der erste Abschnitt erläutert die Funktion und Anwendung von stochastischen Petri Netzen (SPN). Weiterhin werden Verfahren zur Analyse von Petri Netzen vorgestellt. Eines dieser Verfahren ist das Proxelverfahren, welches im Anschluß daran beschrieben wird. Im folgenden Abschnitt werden die Hidden Markov Modelle (HMM) und ihre Analyseverfahren erläutert. Sie bilden eine weitere Möglichkeit stochastische Prozesse zu beschreiben. Der schließende Abschnitt verdeutlicht einen Zusammenhang der drei beschriebenen Methoden. Dieses Kapitel bildet eine Basis zum weiteren Verständnis der Arbeit.

Die konkrete Umsetzung der prototypischen Implementierung beschreibt Kapitel 3. Als erstes werden notwendige vorbereitende Schritte für den Beginn der Analysen beschrieben. Die Algorithmen zur Berechnung der Untersuchungsergebnisse werden anhand von Beispielen erläutert. Im Anschluß daran werden die Eigenschaften des veränderten Proxelverfahrens beschrieben. Das Kapitel schließt mit Fragestellungen zum Verhalten des neuen Ansatzes.

Um die Eigenschaften des entwickelten Verfahrens zu analysieren, werden in Kapitel 4 geeignete Experimente durchgeführt. Die dazu erstellten Modelltypen werden anhand von anwendungsorientierten Beispielen veranschaulicht und ausgewertet. Anschließend werden Empfehlungen über die Verwendung und Einsetzbarkeit des entwickelten Verfahrens gegeben. Das Kapitel schließt mit Beschreibungen zur Verbesserung der Effizienz des angepassten Proxelverfahrens. Des Weiteren werden Ideen für zusätzliche Analysen von Signalmodellen erläutert.

Das letzte Kapitel beinhaltet eine Reflexion über die gesamte Arbeit. Dort wird auf das Erreichen der ursprünglich gesetzten Ziele und dessen Bewertung eingegangen. Eine

Zusammenfassung beschreibt die neu entstandenen Analysemöglichkeiten für Petri Netze. Abschließend folgt ein Ausblick auf Möglichkeiten der anschließenden Forschung, die aus dieser Arbeit resultieren.

Der Anhang beinhaltet verschiedene Resultate von Beispielen aus der Arbeit und andere zum Verständnis hilfreiche Ergänzungen.

## 1.2 Motivation

Die computergestützte Simulation beschäftigt sich mit der Vorhersage und der Analyse des Verhaltens eines angenommenen oder realen Systems. Die zu analysierenden Prozesse und deren Verhalten werden mit Hilfe von mathematischen Modellen abstrakt im Rechner dargestellt. Dies lässt Aussagen und Erkenntnisse über abgebildete Systeme zu. Des Weiteren werden einfache und effektive Analysemethoden benötigt. Die Simulation hat die Möglichkeit Systeme vor ihrer praktischen Umsetzung zu untersuchen. Ein Produktionssystem oder ein Produkt kann somit schon in der Planungsphase optimiert werden.

Eine Methode, Systeme mit zufälligen Ereignissen zu modellieren, sind stochastische Petri Netze (SPN). Diese Methode wird als eine intuitive Art der abstrakten Abbildung von ereignisgesteuerten Systemen angesehen. Die Analyseverfahren für Petri Netze liefern Aussagen über ein System. Ein Beispiel dafür wäre, die Auslastung einer Maschine zu bestimmen. Eine Möglichkeit der Analyse von Petri Netzen ist die ereignisbasierte Simulation. Dabei wird die Entwicklung eines Systems durch Zufallszahlen gesteuert. Um aussagekräftige Ergebnisse zu erhalten, werden mehrere Replikationen mit unterschiedlichen Zufallszahlenreihen durchgeführt. Die Analyseergebnisse stellen somit auch eine Zufallsvariable dar.

Eine zweites Verfahren zur Analyse von SPN sind zustandsraumbasierte Methoden. Das Proxelverfahren bietet eine solche Art der deterministischen Analyse von stochastischen Prozessen. Dieses Verfahren untersucht die möglichen Zustände in denen sich ein System befinden kann. Angefangen mit einem initialen Zustand, in dem sich das System befindet, werden nach und nach alle möglichen Folgezustände ermittelt. Die Zustände und Zustandsübergänge können auch als Markov-Kette beschrieben werden. Markov-Ketten stellen ein weiteres mathematisches Modell für stochastische Prozesse dar und werden in Kapitel 2 genauer beschrieben.

Eine weitere Art stochastischer Prozesse, sind so genannte Hidden Markov Modelle. Diese Modelle sind ereignisbasiert und geben bei der Änderung des Systemzustandes Signale aus. Als Ausgabe erhält man eine Folge von Zeitpunkten mit zugehörigen Beobachtungen (Signale). Solche Modelle finden beispielsweise Anwendung in der Sprach- und Mustererkennung. In der Spracherkennung sind die Signale eine Folge von Lauten (Phoneme), die letztendlich ein Wort zusammen setzen.

Mit diesen Hidden Markov Modellen können drei Fragestellungen beantwortet werden. Als erstes möchte man wissen, wie wahrscheinlich es ist, eine Folge von Lauten durch ein bestimmtes Modell zu erzeugen. Die zweite Analyse ermittelt den wahrscheinlichsten Entwicklungsweg einer Lautfolge, die das Modell zulässt. Das dritte Verfah-

ren trainiert das Modell auf die wahrscheinliche Ausgabe einer Signalfolge. Dokumente für detaillierte Informationen zu Spracherkennung sind im Literaturverzeichnis unter [Bau66,Bau67,IEEE89] aufgeführt.

Für produktionsorientierte Anwendungsbereiche ist das Systemverhalten selber interessant. Es soll beispielsweise ein Modell einer realen Signalquelle entworfen werden, die auf praktischem Wege nicht untersucht werden kann. Die Entwicklung eines Modells vom Produktionsablauf eines Konkurrenzunternehmens wäre dafür ein interessantes Beispiel. In einem anderen möglichen Szenario existiert ein Modell eines Atomreaktors. Es kann für dieses sicherheitskritische System die Wahrscheinlichkeit des Auftretens einer genauen Abfolge von gefährlichen Ereignissen ermittelt werden. Weitere Beispiele für die Anwendung von Signalmodellen (HMM) werden in Kapitel 4 beschrieben.

Signalmodelle können durch die Verfahren der so genannten Hidden Markov Modelle (HMM) beschrieben und analysiert werden. Diese Modelle stellen eine spezielle Art der oben bereits erwähnten Markov Modelle dar. Zusätzlich zu der Beschreibung zeitdiskreter stochastischer Prozesse wird die stochastische Ausgabe von Signalen berücksichtigt.

Die Arbeit beschäftigt sich mit der Übertragung der Analyseverfahren der HMM auf SPN. Beide Methoden dienen zur Modellierung und Analyse stochastischer Prozesse. Mit der Beschreibung der Zustandswechsel eines Systems mit Hilfe einer Markov-Kette, können HMM und SPN durch das zustandsraumbasierte Analyseverfahren der Proxel analysiert werden. Dadurch können auch an Petri Netze die oben genannten Fragestellungen gerichtet werden.

Aufgrund der intuitiveren und praxisnäheren Modellierbarkeit von SPN ergibt sich daraus ein Ansatz, welcher nicht nur Experten der Theorie von Markov-Ketten Zugang zur Analyse von Signalmodellen bietet. Das Proxelverfahren ermöglicht im Gegensatz zu den HMM eine automatische Erstellung des Markov Modells aus einem Petri Netz Modell. Damit wird der Entwicklungsaufwand eines Modells vereinfacht. Welche weiteren Vorteile der neue Ansatz bietet wird in Kapitel 4 deutlich.

Die Verknüpfung der Analysemethoden der HMM mit SPN eröffnet neue Möglichkeiten der Modellierung von Signalmodellen. Dadurch können Modelle erarbeitet werden, die zur Lösung bestehender Problematiken in unterschiedlichen Bereichen der Forschung und Entwicklung beitragen.

### **1.3 Ziele und Erwartungen**

Das Ziel ist es, die ersten beiden Fragestellungen der Hidden Markov Modelle in das Proxelverfahren zu integrieren. Dazu soll eine prototypische Implementierung erstellt werden. Dieses Programm soll im Anschluß daran für weitere Untersuchungen dienen. Ein weiteres Ziel sind Aussagen über die Verwendbarkeit des neuen Ansatzes. Mit der Durchführung von Experimenten werden Erkenntnisse soll evaluiert werden, für welche Anwendungsgebiete die Proxel-basierte Analysemethode vorteilhaft ist oder nicht.

Das Hauptziel dieser Arbeit ist es, reale oder hypothetische Signalmodelle in Zukunft durch Petri Netze zu modellieren und analysieren zu können. Das soll gleichzeitig zur bis-

herigen Analyse der SPN durch das Proxelverfahren realisiert werden. Dadurch wird eine Signalfolge, die das SPN emittieren kann, mit den Fragestellungen der HMM analysiert werden können.

Es wird erwartet, dass sich der modifizierte Proxelalgorithmus sehr ähnlich zum ursprünglichen Verfahren verhält. Aufgrund der Untersuchung einer festgelegten Signalfolge kann der Zustandsraum eines Modells stärker eingeschränkt werden. Das liegt an der Bedingung, dass nur Entwicklungspfade des System betrachtet werden, welche die Signalfolge erzeugen können. Es wird erwartet, dass dadurch der Berechnungsaufwand des Proxelverfahrens verringert wird. Die Wahrscheinlichkeit eines Proxel wird mit einer zweiten Wahrscheinlichkeit für die Ausgabe eines Signals kombiniert. Vermutlich liefert die Analyse einer langen Signalfolge dadurch sehr kleine Wahrscheinlichkeiten. Daraus resultiert vermutlich eine Begrenzung der Simulationzeit bei der Untersuchung von Ausgabemodellen durch den zweiten stochastischen Prozess.

Aufgrund der Modellierungseigenschaften der stochastischen Petri Netze wird die Verwendung des neuentwickelten Verfahrens durch Nutzer ohne detailliertes Expertenwissen über Markov-Ketten angestrebt. Vermutlich ergeben sich noch weiterführende Forschungsthemen, die das Potential dieses neuen Ansatzes weiter ausschöpfen können.

## 1.4 Arbeitsplan

Aus den im vorherigen Abschnitt gesetzten Ziele ergibt sich der folgende Arbeitsplan. Als Voraussetzung soll die Theorie der Hidden Markov Modelle mit den drei Analyseformen, recherchiert werden.

Mit diesem Wissen soll ein Konzept für die Anpassung der Analysealgorithmen auf den Proxelalgorithmus aufgestellt werden. Weiterhin soll die Implementierung die Durchführung von Experimenten mit unterschiedlichen Modellen und Parametern ermöglichen.

Es existiert keine Klassifikation von Modellarten für SPN oder HMM. Aus diesem Grund müssen für die zu untersuchenden Eigenschaften repräsentative Beispiele entworfen werden.

Die Experimente sollen die Vor- und Nachteile der entwickelten Proxel-basierten Analysemethode von Signalmodellen beleuchten und mögliche Spezialfälle kennzeichnen. Mit Hilfe der dadurch erlangten Schlussfolgerungen sollen Empfehlungen für den vorteilhaftesten Einsatz dieses neuen Verfahrens gegeben werden.

## 2 Grundlagen

Dieses Kapitel dient zur Erläuterung wichtiger Grundlagen für das Verständnis von Verfahren zur Analyse stochastischer Prozesse. Zur Modellierung dieser Prozesse werden stochastische Petri Netze (SPN) und Hidden Markov Modelle (HMM) beschrieben. Die Fragestellungen der HMM werden in dieser Arbeit auf das im folgenden erläuterte Prozedurverfahren angepasst.

### 2.1 Analyse stochastischer Prozesse

Mit Hilfe von Simulationsmodellen versucht man, reale oder hypothetische Systeme in einer einfachen und abstrakten Form darzustellen. Um das zu erreichen, bildet man nur für die Analyse notwendige Sachverhalte aus der Realität ab. Das bietet sich vor allem an, wenn das abzubildende System sehr komplex ist. Meist kann die Gesamtheit der Einflüsse auf das System von einem einzelnen Menschen nicht mehr überblickt werden. Ein Beispiel dafür wäre die Produktion eines Automobils. Um die lückenlose Produktion zu gewährleisten, muss das Zusammenspiel vieler Teilabläufe funktionieren. Um diese Produktion zu planen, werden diese Prozesse mit Simulationsmodellen abgebildet und ihre Funktion analysiert und optimiert. Dadurch können verschiedene denkbare Szenarien des Systemablaufs analysiert werden.

#### 2.1.1 Stochastische Petri Netze

Eine Methode zeit-diskrete Systeme zu modellieren und anschließend analysieren zu können, liefern die stochastischen Petri Netze [ITS]. Hier werden Prozesse durch Ereignisse beschrieben, welche zu diskreten Zeitpunkten auftreten. Diese Art der Modellierung, definiert nach (Molloy 1980), beschreibt das Verhalten eines Systems. Die Beschränkung auf die Modellierung der wesentlichen Einflussfaktoren des Systems und ihre Attribute liefern ein als einfach geltendes Modellierungswerkzeug.

Als Beispiel beschreibt das Bild 2.1 eine arbeitende Maschine, wenn sich die Marke im Zustand *OK* befindet. Die Transitionen *T1* und *T3* werden beide als aktiviert bezeichnet. Je nach Definition der dazugehörigen Verteilungsfunktionen, welche die Änderungen beschreiben, können zwei mögliche Ereignisse eintreten. Zum einen kann die Maschine ausfallen durch *T3* und die Anzahl der Marken in *FAIL* ändert sich auf eins. Zum anderen kann sie gewartet werden durch *T1* mit der Änderung in *MAINT* auf eine Marke. Die Anzahl der Marken in *OK* wird in beiden Fällen um eine verringert. Die Maschine arbeitet wieder normal, wenn sie repariert (*T4*) oder gewartet (*T2*) wurde. Somit sind diese Sachverhalte recht einfach auszudrücken und mit Hilfe einer geeigneten Benutzeroberfläche nicht nur durch Simulationsexperten modellierbar.

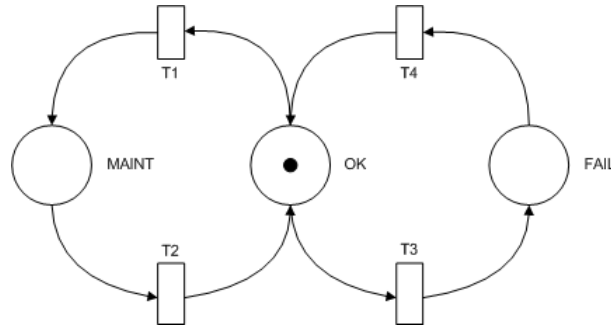


Abbildung 2.1: Maschine arbeitet (OK), ist defekt (FAIL) oder wird gewartet (MAINT)

Eine Gemeinsamkeit von SPN zu Signalmodellen schafft die Möglichkeit, von Petri Netzen auch Ausgaben erzeugen zu können. Diese Ausgaben werden als Rewards bezeichnet und repräsentieren Kostenfunktionen. Für das oben aufgeführte Beispiel kann das bedeuten, dass für jede Wartung der Maschine ein Kostenbetrag von tausend Euro auszurichten ist. Somit würde beim feuern der Transition  $T2$  eine Gesamtsumme für die laufenden Kosten der Maschine jeweils um den Wert tausend inkrementiert werden.

Zur Analyse der SPN wird im Allgemeinen zeit-diskrete ereignisbasierte Simulation [DESS05] (Monte Carlo Simulation) verwendet. Das kontinuierliche Verhalten eines SPN wird auf diskret eintretende Ereignisse abgebildet. Dieses Verfahren verwendet Pseudo-Zufallszahlen und liefert Ergebnisse, die dadurch auch Zufallsvariablen sind. Die Abarbeitung der möglichen zufälligen Ereignisse stellt einen Pfad durch den Zustandsraum des Systems dar. Um statistisch signifikante Ergebnisse zu erhalten, müssen viele Replikationen mit unterschiedlichen Zufallszahlenfolgen durchgeführt werden. Das kann zu hohen Laufzeiten der Simulation führen. Des Weiteren kann nicht garantiert werden, dass alle möglichen Zustandsübergänge untersucht werden. Die Anzahl der Simulationsläufe für aussagekräftige Ergebnisse hängt von der Steifheit [BGdMT] des Modells, der Güte der verwendeten Zufallszahlen und den Anforderungen des Anwenders an die Genauigkeit der Ergebnisse ab.

Zur Beschreibung des zeitlichen Verhaltens, für die Änderungen der Zustände des Systems, können allgemeine Verteilungsfunktionen verwendet werden. Diese Funktionen repräsentieren beispielsweise die Dauer einer modellierten Aktivität. Für den Fall, dass alle Transitionen exponentiell-verteilt sind, kann der stochastische Prozess, den das Petri Netz beschreibt auch als Markov-Kette dargestellt werden. Für diesen Fall existieren mehrere Analyseverfahren, die meist auf dem Lösen von Gleichungssystemen beruhen. Diese sind nicht auf Zufallszahlen oder wiederholte Simulationsläufe angewiesen und sind daher genauer.

Bei der ausschließlichen Verwendung von exponentiell-verteiltern Zustandsübergängen resultieren bei Diskretisierung der Zeit konstante Wahrscheinlichkeiten für die Übergänge. Das begründet sich aus einer mathematischen Eigenschaft der Exponentialfunktion. Die Funktion wird nicht von der Vergangenheit beeinflusst. Deswegen nennt man sie gedächtnislos. Die Begrenzung auf eine einzige stochastische Verteilung bei Markov-Ketten

ist eine starke Einschränkung der Mächtigkeit der Modellierung. Um allgemeine Übergangsverteilungen zu untersuchen, muss die verstrichene Zeit  $x$  (Alter des aktivierten Zustandsübergangs) durch so genannte Hilfsvariablen gespeichert werden. Die für eine zeit-diskrete Analyse resultierenden Wahrscheinlichkeiten der Zustandsübergänge sind jedoch nicht mehr konstant und von  $x$  abhängig.

Die analytische Untersuchung von Modellen mit allgemein verteilten Zustandsübergängen führt zu partiellen Differentialgleichungen. Für diese Art von Verfahren bestehen aber in der Praxis weitere Einschränkungen. So ist zum Beispiel maximal ein einziger aktivierter Zustandsübergang, mit nicht-exponentiell Verteilungsfunktion, für jeden Zeitpunkt der Analyse im Modell zugelassen.

Im folgenden Abschnitt wird ein alternatives Verfahren für die deterministischen Analyse von SPN erläutert. Diese Methode ist eine zustandsraumbasierte Analyse des Systems. Es nutzt auch das Prinzip der Hilfsvariablen zur Speicherung der Aktivierungszeit der Zustandsübergänge. Somit ermöglicht es die Verwendung von allgemeinen Verteilungsfunktionen.

## 2.2 Das Proxelverfahren

Das Proxelverfahren wurde von Graham Horton im Jahre 2002 [Hor02] entwickelt. Es bietet eine weitere Form der Analyse von zeit-diskreten stochastischen Prozessen, wie beispielsweise für stochastische Petri Netze. Als zuvor formuliertes Ziel für diese Arbeit sollte eine erfolgreiche Evaluierung der Nutzung von Petri Netzen in Verbindung mit der Analyse zeitlich aussagebehafteter Beobachtungsfolgen durchgeführt werden. Dazu sollen die folgenden Teilabschnitte für den Leser ein Basiswissen über den Themenbereich der Analyse von Petri Netzen durch die Proxelmethode liefern.

### 2.2.1 Allgemeine Proxel-basierte Simulation

Das Wort Proxel wurde in Anlehnung an das bekannte Wort Pixel (Picture Element) entworfen und bedeutet „Probability Element“. Wie auch die Datenstruktur eines Pixel Informationen über die Position und die RGB-Farbvariablen beinhaltet, so stellt auch die Struktur der Proxel verschiedene Informationen über den Zustand eines Systems bereit. Diese Variablen geben beispielsweise Auskunft über die bisher verstrichene Simulationszeit oder speichern die Wahrscheinlichkeit den Zustand des Systems über einen bestimmten Pfad von Zustandwechseln zu erreichen.

Das Verfahren bildet das kontinuierliche Verhalten eines Petri Netzes auf diskrete Zeitabschnitte durch Definition der zeitlichen Schrittweite  $\Delta t$  ab. Es verwendet ebenfalls das Prinzip der Hilfsvariablen („supplementary variables“), indem innerhalb der Struktur eines Proxel „Alters-Variablen“ allgemein verteilter Zustandsübergänge gespeichert werden. Dies lässt eine uneingeschränkte Nutzung von allgemeinen Verteilungsfunktionen zu. Es wird dennoch angenommen, dass in einem Zeitschritt maximal nur eine Zustandsänderung stattfindet. Das hat zur Folge, dass die Zeitschrittweite  $\Delta t$  klein genug gewählt werden muss, so dass die Wahrscheinlichkeit für mehr als einen Zustandsübergang ver-

schwindend gering ausfällt. Dennoch stellt diese Art der Simulation von SPN eine leicht verständliche, deterministische Möglichkeit der Untersuchung dar.

Die formale Definition eines Proxel beschreibt:

Ein Proxel  $P = (p, S)$  ist ein Vektor mit einem Zustand  $S = (m, \tau, t)$ . Dieser Zustand beschreibt eine bestimmte Markierung  $m$  des SPN zur Zeit  $t$ . Des Weiteren werden im Vektor  $\tau$  die Aktivierungsdauern der Transitionen gespeichert. Die Wahrscheinlichkeit  $p$  des Proxel gibt an, mit welcher Wahrscheinlichkeit sich das SPN in diesem Zustand befindet.

- $m$  Markierungsvektor des SPN ( $m_0$  initial)
- $\tau$  Aktivierungszeitvektor der einzelnen Transitionen
- $t$  verstrichene Simulationszeit

Das Prinzip hinter der Analyse eines SPN mit Hilfe des Proxelalgorithmus sieht wie folgt aus. Ausgehend von einem initialen Zustand  $P_0$  werden alle möglichen Folgezustände ermittelt. Anschließend werden die Wahrscheinlichkeitsflüsse zu den Nachfolgern mit Hilfe eines diskreten Zeitschrittes  $\Delta t$  und der „instantaneous rate funktion“ (IRF) berechnet. Diese Funktion ermittelt eine Rate  $h(\tau)$ , auch bekannt als „hazard rate“ oder „instantaneous failure rate“, die den kontinuierlichen Wahrscheinlichkeitsfluss der Zufallsvariable angibt.  $h(\tau)$  ergibt sich aus dem Verhältnis der Dichtefunktion  $f(\tau)$  einer Verteilung und der Überlebensfunktion  $1 - F(\tau)$ .

$$h(\tau) = \frac{f(\tau)}{1 - F(\tau)}$$

Im Bild 2.2 ist der Erreichbarkeitsgraph des im vorherigen Abschnitt gezeigten Petri Netzes (Bild 2.1) abgebildet. Er beschreibt, welche Zustände über welche Zustandswechsel erreicht werden können. Dieser Graph stellt somit eine Struktur dar, mit der die Entwicklungsmöglichkeiten aus jedem Zustand des SPN beschrieben werden.

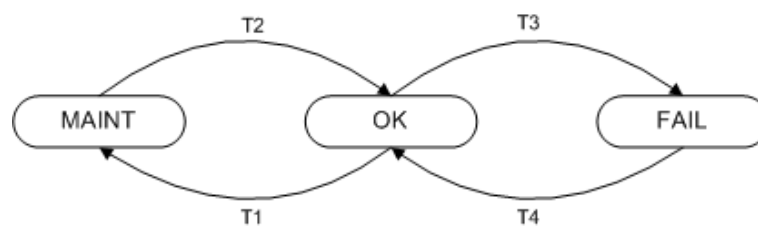


Abbildung 2.2: Erreichbarkeitsgraph des SPN, in dem die Maschine arbeitet (OK), defekt ist (FAIL) oder gewartet wird (MAINT)



Weiterführend beschreibt die nächste Grafik 2.3 die aus dem Erreichbarkeitsgraphen und der Initialmarkierung resultierenden möglichen Entwicklungspfade des Modells. Diese Struktur bildet alle zu erzeugenden Proxel für das Modell bis zur Simulationszeit ( $2\Delta t$ ) ab. Sie stellt eine Baumstruktur von Proxeln dar.

Die Wahrscheinlichkeit des Wurzelproxel (startet mit 1.0) wird auf die nachfolgenden Proxel des nächsten Zeitschrittes aufgeteilt (Bild 2.3). Damit wird die Wahrscheinlichkeit eines Proxel mit wachsender Tiefe immer kleiner und konvergiert gegen null. Die Summe aller Proxel einer Ebene ( $k\Delta t$ ) im Baum, die den gleichen Markierungsvektor  $m_X$  beinhalten, stellt die Wahrscheinlichkeit zum Zeitpunkt  $k\Delta t$  in der Markierung  $X$  des SPN zu sein.

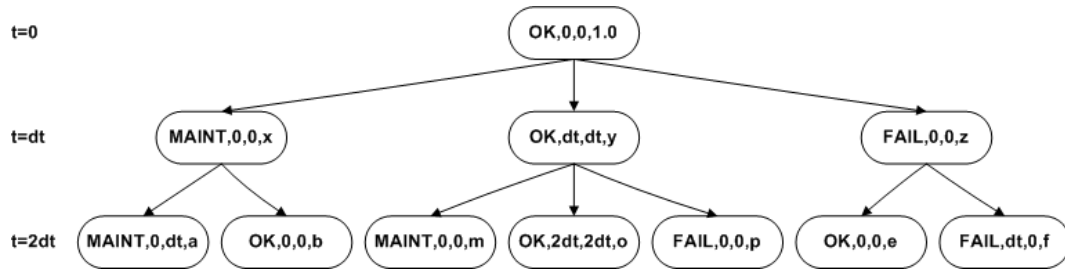


Abbildung 2.3: Struktur des Proxelbaums zum beschriebenen Petri Netz (Markierung,  $\tau_1$ ,  $\tau_2$ , Wahrscheinlichkeit des Proxel)

Wie das Beispiel 2.1 <sup>1</sup> zeigt befindet sich das System zum Zeitpunkt  $t = 0$  im Zustand *OK*. Der Term der einzelnen Blätter beinhaltet den Namen des Zustandes, in diesem Fall zwei Alters-Variablen ( $\tau_1, \tau_2$ ) und die Wahrscheinlichkeit  $p$  dafür, dass das System sich unter Voraussetzung des abgebildeten Pfades in einem der drei möglichen Zustände befindet. Initial sind die Altersvariablen 0, da zum Zeitpunkt  $t=0$  noch keine Zeit verstrichen ist und keine Transition altern konnte. Für den Fall, dass das System nach dem ersten Zeitschritt im Zustand *OK* bleibt, wachsen die beiden Altersvariablen auf jeweils ein  $\Delta t$  an. Die Aktivierungszeit wird gespeichert, da die beiden Transitionen *T1* und *T3* nicht gefeuert haben. Kommt es in einem Zeitschritt zu einem Zustandswechsel, so wird die Altersvariable der feuernenden Transition für die Ermittlung der Wahrscheinlichkeit des Folge-Proxel verwendet und für diesen wieder auf null gesetzt. Ist es nötig nur ein  $\tau$  zu speichern so bleibt der zweite Wert ungenutzt und findet keine Verwendung bei der Berechnung.

Alle Proxel der Simulationszeit  $k\Delta t$ , sprich die gesamte Ebene des Baumes, repräsentieren alle möglichen Entwicklungen des Systems zu diesem Zeitpunkt. Eine wichtige Erkenntnis daraus ist, dass eine Proxelbaum-Ebene, mit ihren ermittelten Wahrscheinlichkeiten der Zustandsübergänge, auch durch eine Markov-Kette repräsentiert werden kann.

<sup>1</sup>die ausformulierten Variablen wie  $a, b, x, y \dots$  sind im Anhang unter 6.6 zu finden

Wie bereits erwähnt ist der Verwendung von allgemeinen Verteilungsfunktionen keine Grenze gesetzt. Unter Nutzung des Prinzips der supplementary variables (SV) speichert ein Proxel die nötigen Informationen aller zeitbehafteten Verteilungen in seiner Datenstruktur. Somit ist das Verfahren für stochastische Petri Netze mit unbegrenzter Anzahl von nicht-exponentiell verteilten Zufallsvariablen anwendbar. Auch zeitlose Übergänge können durch das Verfahren berücksichtigt werden [Laz03].

Die Vorteile dieses Verfahrens liegen in der deterministischen Konzeption und in dem einfachen Algorithmus. Durch die Verwendung des Zustandsraumes besteht die Gefahr des Zustandsraumexplosion. Dies lässt sich aber durch die Definition einer unteren Schranke für die Wahrscheinlichkeitswerte der einzelnen Proxel begrenzen. Somit wird die Größe des Baumes und der zu verwendende Speicheraufwand entsprechend kontrolliert.

## 2.3 Analyse von Hidden Markov Modellen

Die mathematischen Grundlagen der so genannten Markov-Ketten Modelle wurden von Andrei Andrejewitsch Markov entwickelt. Sie beschreiben theoretische Konstrukte, mit denen es sehr gut möglich ist, stochastische Prozesse darzustellen. Diese Modelle aus Ketten von Zuständen, deren Verbindungen ein spezieller stochastischer Prozess zu Grunde liegt, wurden von A. Markov zu statistischen Vorhersagen für das Auftreten von Konstrukten (Buchstaben-Gruppen, Wortgruppen) in einem Dokument verwendet. Man unterscheidet zwischen zeit-kontinuierlichen und zeit-diskreten Markov-Ketten. Diese Arbeit beschäftigt sich mit der zeit-diskreten Analyse und beschränkt sich somit auf die Verwendung von diskreten Markov-Ketten. Diese Ketten werden aus Zuständen, die das abzubildende System einnehmen kann, gebildet. Zwischen den Zuständen werden Übergangswahrscheinlichkeiten definiert, die das Verhalten des Systems kennzeichnen. Diese werden in einer Matrix dargestellt. Die Lösungsverfahren für Markov-Ketten basieren auf dem Lösen von Gleichungssystemen.

Das Charakteristischste an diesen Modellen ist die sogenannte Markov-Eigenschaft. Sie definiert, dass die Wahrscheinlichkeit, in den zeit-diskreten Folgezustand zu wechseln, nur von dem aktuellen Zustand, in dem sich das System befindet, abhängt. Das bedeutet, dass die Kenntnis der vorangegangenen Ereignisse keinen Einfluss hat und das gesamte System durch den aktuellen Zustand beschrieben wird. Deshalb werden die Markov-Ketten auch als gedächtnislos bezeichnet. Als Beispiel macht dies das Experiment eines Münzwurfes deutlich. Die Wahrscheinlichkeit, einen bestimmten Ausgang des Wurfes vorauszusagen, hängt nicht von vorangegangenen Ergebnissen ab. Diese Annahme vereinfacht viele reale Sachverhalte jedoch sehr stark und ist oft nicht wünschenswert.

Es ist dennoch möglich, vergangene zeitliche Aspekte durch das Design des Modells zu berücksichtigen. Die Zustände des Modells berücksichtigen in ihrer Bedeutung, von wie vielen vorangegangenen Zuständen der modellierte Prozess abhängt. Das Bild 2.4 zeigt dazu drei verschiedene Möglichkeiten. Das Beispiel beschreibt einen Zyklus von Besuchen dreier unterschiedlicher Restaurants. Die Buchstaben der Zustände beschreiben die jeweils aktuelle Wahl des Restaurants bzw. die Besuche der vergangenen Tage. Die Va-

riablen der Zustandsübergänge repräsentieren demzufolge die Wahrscheinlichkeiten nach einem Besuch in Restaurant  $X$  nun zu  $Y$  zu gehen. Dieses Beispiel zeigt bei diese Art und Weise der Modellierung ein exponentielles Wachstum der nötigen Zustände.

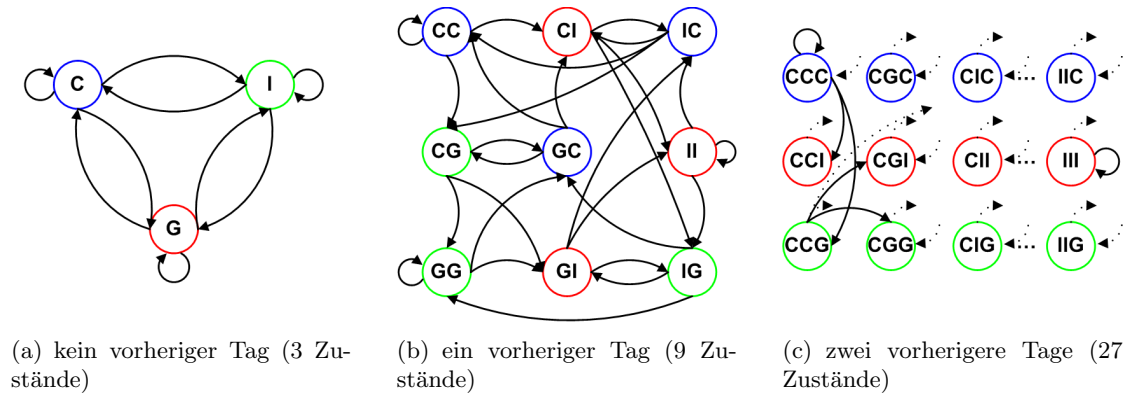


Abbildung 2.4: mögliche zeitliche Erweiterungen für das Modell der Besuche in 3 verschiedenen Restaurants (C Chinese, I Italiener, G Grieche)

Dieses Beispiel bezieht nur drei vergangene Tage in den Zustand des Modells ein. Trotzdem verursacht es in der letzteren beschrieben Variante schon einen recht großen Modellierungsaufwand. Bei Sachverhalten mit einer größeren Anzahl von Prozessen dieser Abhängigkeit, führt das zu einem enormen Modellierungsaufwand und sehr komplexen Modellen. Werden diese Modelle wiederum zu komplex, ist das Ziel einer abstrakteren und verständlicheren Abbildung des realen Systems gescheitert.

### 2.3.1 Was sind Hidden Markov Modelle

Eine spezielle Form der Markov Modelle stellen die Hidden Markov Modelle (HMM) dar. Sie dienen zur Untersuchung von Signalfolgen, die ein Markov Modell im Laufe der diskreten Zeitschritte ausgeben kann. Die Theorie für die Verfahren wurden von L. E. Baum und verschiedenen Kollegen in den späten 60er und frühen 70er Jahren entwickelt und veröffentlicht [Bau66]. Sie beschreiben eine Markov-Kette mit einem zusätzlichen stochastischen Prozess. Wie auch schon im vorangegangenen Abschnitt, werden für diese Modelle  $N$  verschiedene Zustände und deren Übergangswahrscheinlichkeiten definiert. Zusätzlich zu den oben erwähnten Markov Modellen können bei den HMM in jedem diskreten Zeitschritt Ausgaben erzeugt werden. Das wird durch den zweiten stochastischen Prozess realisiert. Hierbei werden genau wie für die Zustandsübergänge Wahrscheinlichkeiten für die Emission von zuvor definierten Ausgabesymbolen festgelegt. Die Wahrscheinlichkeiten der Ausgaben hängen nur vom jeweiligen Zustandübergang für den sie definiert sind ab, nicht von vorherigen Zuständen oder der Zeit selbst. Die Schicht der Zustände wird als „hidden“ also als versteckt betrachtet, da in der Praxis

nur die Beobachtungs- oder Mess-Sequenz (Ausgaben) bekannt ist. Welche Entwicklung das Modell für die Ausgabe der Beobachtung vollzogen hat, ist nicht offensichtlich. Es ist also mit Hilfe der Beobachtungen nicht immer möglich, auf den Zustand des Systems zu schließen. Das System befindet sich in einer Art Blackbox, welche die Ausgaben erzeugt. Man kann nur die Ausgaben beobachten, ohne den dahinter liegenden erzeugenden Prozess zu kennen.

Als Beispiel zeigt Abbildung 2.6 ein Wettermodell. Die Zustände des Modells beschreiben den Grad der Bewölkung. Das Modell liefert je nach Zustandsübergang, die gerade vorherrschende gerundete Temperatur. Für unterschiedliche Bewölkungen am Himmel definiert das Modell eine bestimmte Wahrscheinlichkeiten für die Ausgabe einer Temperatur.

Es liegt nun eine Messfolge von Zeitpunkten vor an denen die Temperatur aufgezeichnet wurde (Abbildung 2.5).

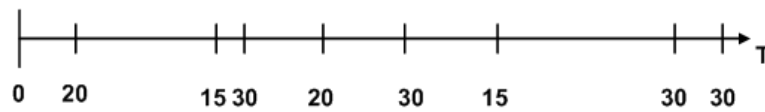


Abbildung 2.5: zeitliche Reihenfolge der Messung von Temperaturen

Im Bild 2.6 zeigt das Hidden Markov Modell zu diesem Beispiel.

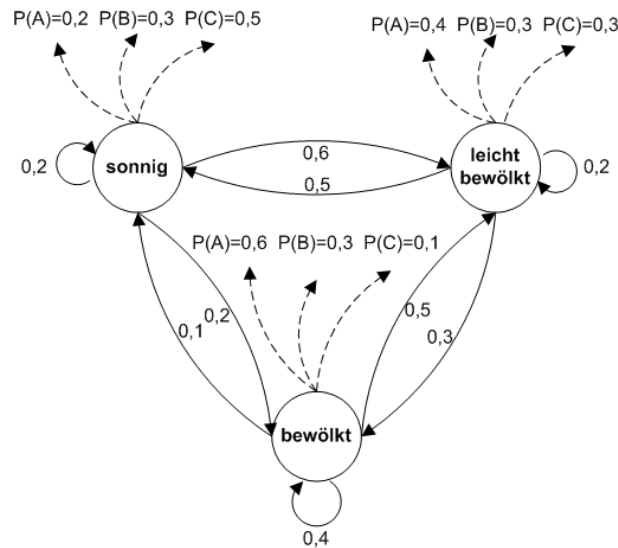


Abbildung 2.6: Bewölkungsmodell mit den zu beobachtenden Temperaturen (A  $\rightarrow$  15 °C, B  $\rightarrow$  20 °C, C  $\rightarrow$  30 °C)

Man nehme an, dass dieses simple Wettermodell die Veränderungen der Temperaturen an einem Ort der Welt tatsächlich genau beschreibt. Eine Frage die sich dann stellt ist, wie der Verlauf der Bewölkung des Himmels aussah, um diese Folge von Temperaturen messen zu können. Eine andere Fragestellung wäre, ist es möglich ein Wettermodell für einen anderen Ort zu erzeugen von dem einige beschreibende Messungen vorliegen. Mit der Modellierung und Analyse dieser Art der Problemstellungen beschäftigen sich HMM. Nach einer formalen Definition folgt die Erläuterung der Analyseverfahren.

Ein Hidden Markov Modell ist definiert als ein Tripel:  $\lambda = (A, B, \pi)$  wobei

- $A = \{a_{ij}\}$  die Menge der konstanten Wahrscheinlichkeiten der Zustandsübergänge beinhaltet

$$a_{ij} = P[q_{t+1} = s_j \mid q_t = s_i], \quad 1 \leq i, j \leq N$$

(die Wahrscheinlichkeit zum Zeitpunkt  $t + 1$  in Zustand  $j$  zu sein unter der Voraussetzung sich zum Zeitpunkt  $t$  im Zustand  $i$  befunden zu haben),

- $B = \{b_j(k)\}$  die Menge der Wahrscheinlichkeiten der Beobachtungssymbole im Zustand  $j$  definiert

$$b_j(k) = P[v_k \text{ at } t \mid q_t = s_j], \quad 1 \leq i \leq N, \quad 1 \leq k \leq M$$

(die Wahrscheinlichkeit im Zustand  $j$  das Symbol  $v_k$  auszugeben),

- $\pi = \{\pi_i\}$  den Initialvektor

$$\pi_i = P[q_1 = s_j], \quad 1 \leq j \leq N$$

,

- $S$  die Menge der Zustände  $S = \{s_1, \dots, s_N\}$  des Systems beschreiben, die in der Sequenz von Zuständen  $Q = q_1, q_2, \dots, q_T$  vorkommen und
- $V$  die Menge der verschiedenen Symbole  $V = \{v_1, \dots, v_M\}$  die das Modell ausgeben kann

darstellt.

Die HMM werden in verschiedenen Richtungen der Forschung und Entwicklung genutzt. Beispiel dafür wären die mathematische Mustererkennung, die Analyse von Nukleotidsequenzen in der Biologie oder der Gebärdenerkennung. Das wohl bekannteste Anwendungsgebiet ist die Verwendung der HMM im Bereich der Sprach- und Mustererkennung. Hier werden Markov Modelle für natürliche Sprache entworfen. Dies bietet sich an, da der erzeugende Prozess der Sprache im Verborgenen (hidden) bleibt. Dennoch versucht man natürliche Sprache künstlich nachzubilden und zu verstehen. Die einzelnen Zustände der Modelle und deren zugeordnete Übergangswahrscheinlichkeiten beschreiben die natürliche Sprache und Ihren Eigenheiten und Variationen. Es werden für jedes

Wort einzelne Modelle entworfen, deren Charakteristik durch die Anzahl der Zustände und deren Verbindungen miteinander definiert wird. Die Ausgaben der Modelle werden mit Phonemen (Sprachlauten) assoziiert.

In Fall von linguistischen Modellketten werden oft so genannte „left-right-“ Architekturen verwendet. Wie es der Name schon andeutet, sind die Übergangsmöglichkeiten der Zustände, die sukzessive nacheinander angeordnet sind, von links nach rechts orientiert. Hierbei berücksichtigen die Wahrscheinlichkeiten, dass es zu einem arithmetisch höheren Masse möglich ist vom Linken in den nächst folgenden Zustand auf der rechten Seite zur wechseln, als umgekehrt. Teilweise könne auch Zustände übersprungen werden. Somit kann auf Variationen wie Dialekte, Betonungen und störende- oder fehlende Daten bei Aufzeichnungen eingegangen werden.

Bei der Untersuchung und Analyse der Hidden Markov Modelle ergeben sich die folgenden grundlegende Fragestellungen.

Es ist das Modell und eine Sequenz von zulässigen Symbolen, die das Modell in der Lage ist hervor zu bringen gegeben:

1. Wie wahrscheinlich ist die Erzeugung der gegebenen Sequenz durch das gegebene Modell (Forward-Backward Algorithmus [IEEE89])
2. Welches ist der wahrscheinlichste Pfad von Zuständen der die Sequenz erzeugt hat (Viterbi Algorithmus 1967 [IEEE89])
3. Wie sind die Struktur des Modells und dessen Wahrscheinlichkeiten der Übergänge festzulegen oder zu ändern, so dass die gegebene Sequenz am wahrscheinlichsten erzeugt wird (Bayische Parameterschätzung, Lernverfahren, Baum-Welch Vereinfachungen [IEEE89])

Auf diese Verfahren möchte ich im weiteren Verlauf dieses Kapitels näher eingehen, da die ersten zwei Analysen im nächsten Kapitel auf die Proxelmethode angepasst werden sollen. Somit soll das Prinzip der Berechnungen verdeutlicht werden. Eine noch genauere Beschreibung der folgenden Verfahren liefert das Dokument [IEEE89].

### **2.3.2 Die 3 Analyseverfahren der Hidden Markov Modelle**

Der nächste Abschnitt geht auf die Lösungen der verschiedenen Fragestellungen für HMM ein und erläutert die zugehörigen Algorithmen. Diese Berechnungen werden im folgenden Kapitel in den Algorithmus der Proxel integriert und auf die Verwendung von nicht-exponentiellen Verteilungsfunktionen angepasst.

#### **Der Forward-Backward Algorithmus**

Das erste Analyseverfahren der HMM zielt auf die Berechnung der Wahrscheinlichkeit einer vorgegebenen Signalfolge, die das Modell ausgeben kann, ab. Intuitiv bedeutet das die Ermittlung der Wahrscheinlichkeiten aller möglichen Entwicklungswege, die das

System einschlagen kann um diese Sequenz erzeugen zu können. Die Summe dieser Wahrscheinlichkeiten bildet die Ergebniswahrscheinlichkeit die Sequenz zu erzeugen. So wäre die Wahrscheinlichkeit einer Beobachtungs- oder Mess-Reihe  $O = O_1, O_2, \dots, O_T$  eines Modells  $\lambda = (A, B, \pi)$  mit  $N$  Zuständen, wobei  $Q = q_1, q_2, \dots, q_T$  die Folge der Zustände darstellt, wie folgt zu ermitteln.

$$P(O|\lambda) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \dots \sum_{k=1}^N \pi_{q_i} b_{q_i}(O_1) a_{q_i, q_j} b_{q_j}(O_2) \dots a_{q_i, q_k} b_{q_k}(O_T) \quad (2.1)$$

Die Interpretation dieser Berechnung ist wie folgt zu verstehen. Der erste mögliche Pfad ist der, dass das Modell immer im Zustand  $q_1$  verweilt. Das heißt die Laufvariablen  $i$  bis  $k$  haben den Wert 1. Zum Startzeitpunkt ( $t = 1$ ) gibt  $\pi_{q_1}$  die Wahrscheinlichkeit an, dass sich das System im Zustand  $q_1$  befindet. Der Entwicklungsweg für den ersten Zustand generiert das Symbol  $O_1$  mit der Wahrscheinlichkeit  $b_{q_1}(O_1)$ . Dann ändert sich die Zeit  $T$ , um eine Schrittweite ( $\Delta t = 1$ ) auf  $t = 2$ . Für den Beispielpfad wird die Wahrscheinlichkeit des Übergangs von  $q_1$  nach  $q_1$  mit  $a_{q_{i=1}, q_{j=1}}$  zur Berechnung verwendet. Im zweiten Zeitschritt wird das Symbol  $O_2$  durch die Sequenz ausgegeben. Dadurch wird mit der Wahrscheinlichkeit multipliziert, dass  $O_2$  durch den Übergang  $a_{q_{i=1}, q_{j=1}}$  ausgegeben wird. Dies erfolgt für alle möglichen Kombinationen der Laufvariablen bis zum definierten Endzeitpunkt. Dadurch werden alle möglichen Entwicklungswege des Modells beschrieben. Abbildung 2.7 zeigt eine graphische Interpretation des Algorithmus.

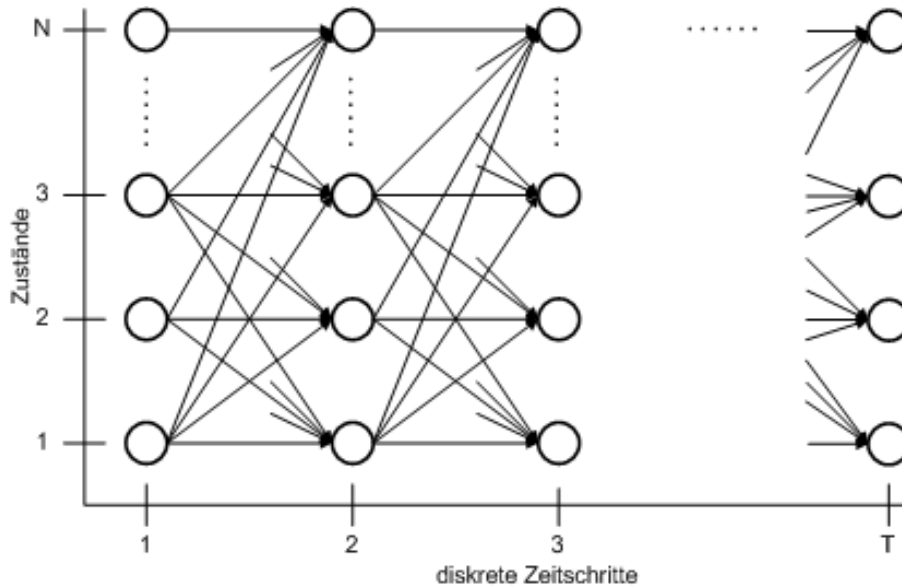


Abbildung 2.7: Visualisierung aller möglichen Entwicklungswege eines Modells mit  $N$  Zuständen

Wenn ein Modell was fünf Zustände ( $N = 5$ ) hat auf eine Sequenz mit hundert Zeitschritten ( $T = 100$ ) untersucht werden soll, braucht man etwa  $10^{72}$  Berechnungen ( $(2T - 1)N^T$  Multiplikationen und  $N^T - 1$  Additionen  $\approx$  Aufwand  $\rightarrow 2 * T * N^T$ ) [IEEE89]. Das ist ein sehr hoher Berechnungsaufwand, der nicht akzeptabel ist.

Der Forward-Backward Algorithmus (FBA) liefert eine geeignete Hilfestellung. Das HMM wird als eine Struktur ähnlich einem Mehrschichtnetzwerk betrachtet. Die Schichten des Modells werden durch alle Zustände eines Modells pro Zeitschritt gebildet und als miteinander verknüpft betrachtet, wie in Bild 2.7 zu erkennen. Die Schichten stellen die Zeitschritte dar und werden nacheinander betrachtet. Der Initiale Vektor  $\pi$  bestimmt die Wahrscheinlichkeit, das sich das System in den Zuständen  $1 \dots N$  im ersten Zeitschritt befindet. Nun wird für jeden möglichen Folgezustand zum Zeitschritt  $t + 1$  ermittelt, von welchen Zuständen er erreicht werden kann. Dargestellt wird das in Abbildung 2.8 (a). Dieser Wert gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass sich das System zum Zeitpunkt  $t + 1$  im Zustand  $j$  befindet. Die ermittelten Pfade stellen alle Möglichkeiten dar, die die Sequenz bis zur Zeit  $t + 1$  erzeugen und sich in Zustand  $s_j$  befinden. Bestimmt man diese Werte für alle Zustände zu  $t + 1$ , würde die Summe aus diesen Wahrscheinlichkeiten das Ergebnis für die Wahrscheinlichkeit der Beobachtungsfolge bis zu Zeitpunkt  $t + 1$  ergeben.

Formaler beschrieben wird ein Term  $\alpha_t(i)$  für den „Vorwärts-“ Schritt eingeführt, der die Wahrscheinlichkeit repräsentiert, dass die Beobachtungsfolge  $O$  im Zeitschritt  $t$  endet und sich das System im Zustand  $i$  befindet. Demnach ist es möglich die gesuchte Gesamtwahrscheinlichkeit für die Beobachtungssequenz induktiv zu berechnen [IEEE89].

Als Induktionsbeginn berechnet man die Wahrscheinlichkeit, das sich das System zum Zeitschritt  $t = 1$  im Zustand  $i$  befindet und das Symbol  $O_1$  in diesem Zustand ausgegeben wird (Gleichung 2.2). Die Summe der Wahrscheinlichkeiten aller Zustände ( $1 \leq i \leq N$ ), würde die Wahrscheinlichkeit für die Erzeugung des ersten Symbols durch das Modell ergeben (Analyse einer Folge mit der Ausgabe nur eines Symbols).

$$\alpha_1(i) = \pi_i b_i(O_1), \quad 1 \leq i \leq N \quad (2.2)$$

Mit Hilfe dieser Werte setzt man das Prinzip dieser Berechnung im Induktionsschritt fort. Unter Verwendung von  $\alpha_1(i)$  wird für den nächsten Zeitschritt die Wahrscheinlichkeit berechnet, das sich das System zu Zeitpunkt  $t + 1$  im Zustand  $j$  befindet. Dieser ist wieder aus den vorherigen Zuständen  $i$  erreichbar, wenn die Wahrscheinlichkeiten der Zustandübergänge  $a_{ij}$  größer als Null sind. Die Summe  $\sum_{i=1}^N \alpha_t(i) a_{ij}$  gibt die zusammengefasste Wahrscheinlichkeit an, den Zustand  $j$  aus allen Vorherigen zu erreichen. Dieser Term wird mit der Wahrscheinlichkeit für das Erzeugen des nächsten Symbols der Folge multipliziert in Zustand  $j$ . Das wird wiederum für alle Zustände  $1 \leq j \leq N$  des Systems berechnet. Damit sind die nötigen Wahrscheinlichkeitswerte für den nächsten Induktionsschritt ermittelt.

$$\alpha_{t+1}(j) = \left\{ \sum_{i=1}^N \alpha_t(i) a_{ij} \right\} b_j(O_{t+1}), \quad 1 \leq t \leq T - 1, \quad 1 \leq j \leq N \quad (2.3)$$



Sind die Berechnungen bis zu Zeitpunkt  $T$  ermittelt, so ergibt die Summe über alle Werte  $\alpha_T(i)$  die Wahrscheinlichkeit der Beobachtungsfolge  $O$  bis zum Zeitpunkt  $T$ .

$$P(O|\lambda) = \sum_{i=1}^N \alpha_T(i) \quad (2.4)$$

Damit kann nun die Wahrscheinlichkeit einer beliebig lange Folge von Signalen in Bezug auf ein Modell mit einem vertretbaren Aufwand ( $N(N+1)(T-1)$  Multiplikationen und  $N(N-1)(T-1)$  Additionen) ermittelt werden. Für das oben genannte Beispiel ( $N = 5$ ,  $T = 100$ ) werden etwa  $10^{69}$  Berechnungen eingespart.

Eine ähnliche Bedeutung der  $\alpha$ -Variable kann auch der Definition einer  $\beta$ -Variable zugeordnet werden. Dieser Term berechnet in der Summe die gleiche Wahrscheinlichkeit einer Beobachtungsfolge wie der  $\alpha$ -Term, jedoch entgegen gesetzt der Zeit. Diese Variable findet im dritten Analyseverfahren der HMM Verwendung, das in einem folgenden Abschnitt noch beschrieben wird.

Mit  $\beta$  für den „Rückwärts-“ Schritt definiert sich der Term  $\beta_t(i)$ , der sich auch induktiv berechnen lässt, wie folgt:

$$\beta_T(i) = 1, \quad 1 \leq i \leq N$$

$$\beta_t(i) = \sum_{j=1}^N a_{ij} b_j(O_{t+1}) \beta_{t+1}(j), \quad 1 \leq t \leq T-1, \quad 1 \leq j \leq N \quad (2.5)$$

Diese Berechnung bewegt sich induktiv rückwärts in der Zeit. Die Bedeutung der Terme  $\alpha_t(i)$  und  $\beta_t(i)$ , in Bezug auf deren jeweils folgenden Induktionsschritte, beschreibt Abbildung 2.8 in (a) und (b).

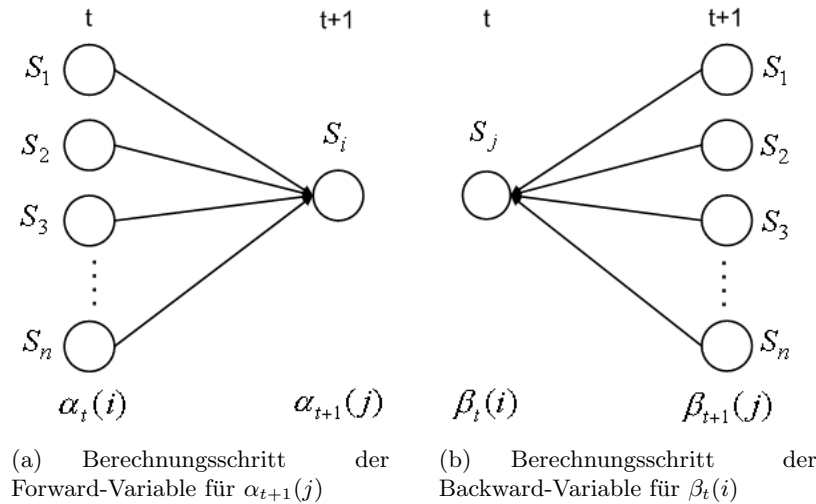


Abbildung 2.8: Visualisierungen der Berechnungen der Forward- und Backward-Variablen

## Der Viterbi Algorithmus

Die zweite Untersuchungsmethode sucht nach den optimalen Zustandsänderungen oder dem Pfad von Entwicklungsmöglichkeiten der die gegebene Beobachtungsfolge erzeugen kann. Eine intuitive herangehensweise wäre die Verfolgung des Pfades, der für jeden nächsten Teilschritt die größte Wahrscheinlichkeit liefert. Somit würde ausgehend vom Initialvektor  $\pi$  und der Ausgabewahrscheinlichkeit für das erste Symbol, der Pfad mit der größten Wahrscheinlichkeit gesucht. Nun könnte man daraus schließen nur den Entwicklungsweg dieses Pfades weiter verfolgen zu müssen. Dies würde der Strategie eines Greedy-Algorithmus [Gre] entsprechen. Das Kriterium betrachtet nur Maxima, die zum aktuellen Abarbeitungsschritt bekannt sind. Somit liefert diese Strategie nur lokale Maxima.

Ein ähnlicher Ansatz betrachtet die globale Sicht auf alle Pfade, die bis zum aktuellen Zeitschritt die Sequenz erzeugen können. Hier wird der optimale Zustandspfad als Maximierung der Wahrscheinlichkeiten von aufeinander folgenden Zustandsänderungen definiert. Dafür wird ein Term  $\delta_t(i)$  definiert. Er gibt die größte Wahrscheinlichkeit eines Entwicklungspfades des Modells bis zum Zeitpunkt  $t$  an, der im Zustand  $i$  endet (Gleichung 2.6).

$$\delta_t(i) = \max_{q_1, q_2, \dots, q_{t-1}} P(q_1, q_2 \dots q_t = i, O_1, O_2 \dots O_t | \lambda) \quad (2.6)$$

Zusätzlich werden pro Zeitschritt Zustände in einem Feld  $\psi_t(i)$  gespeichert. Diese Felder beinhalten die vorangegangenen Zustände, die die wahrscheinlichsten Zustandsübergänge zu  $i$  definieren. Mit diesen Informationen kann im Anschluß an die Berechnung rekursiv der optimale Pfad von Zustandsänderungen ermittelt werden. Initial startet der Algorithmus mit

$$\delta_1(i) = \pi_i b_i(O_1), \quad 1 \leq i \leq N \quad , \quad \psi_{i1}(i) = 0 \quad (2.7)$$

Die folgenden Rekursionsschritte berechnen die Werte für die nächsten Zeitschritte wie folgt:

$$\delta_t(j) = \max_{1 \leq i \leq N} [\delta_{t-1}(i) a_{ij}] b_j(O_t), \quad 2 \leq t \leq T \quad , \quad 1 \leq j \leq N \quad (2.8)$$

Die Formel 2.8 beschreibt, dass für jeden Zeitschritt  $t \leq 2$  bis zum Endzeitpunkt  $T$  der Sequenz ( $2 \leq t \leq T$ ) die Zustandsübergänge bestimmt werden. Dabei werden alle Wahrscheinlichkeiten vom vorherigen Schritt, im Zustand  $i$  zu sein ( $\delta_{t-1}$ ) und in den Zustand  $j$  zu wechseln, ermittelt. Der maximale Wert dieser Wahrscheinlichkeiten, wird mit der Wahrscheinlichkeit in Zustand  $j$ , das nächste Symbol ( $O_t$ ) auszugeben multipliziert. Daraus ergibt sich für jeden Zustand des Systems die maximale Wahrscheinlichkeit über einen bestimmten Pfad die Sequenz erzeugt zu haben. Um diesen Pfad

ermitteln zu können, muss für jeden Zeitschritt ( $2 \leq t \leq T$ ) der Übergang pro Zustand ( $1 \leq j \leq N$ ) gespeichert werden, der den Pfad maximal wahrscheinlich ( $\delta_{t-1}(i)a_{ij}$ ) gemacht hat. Diese Aufgabe übernimmt das zuvor erwähnte Feld ( $\psi_t(i)$ ). In diesem Feld wird zu jedem Zeitschritt der vorangegangene Zustand (*argmax*) des optimalen Pfades gespeichert (Gleichung 2.9).

$$\psi_t(i) = \underset{1 \leq i \leq N}{\operatorname{argmax}} [\delta_{t-1}(i)a_{ij}], \quad 2 \leq t \leq T, \quad 1 \leq j \leq N \quad (2.9)$$

## Der Baum-Welch Algorithmus und Lernverfahren

Als Letztes beschäftigt man sich nicht nur mit der Analyse gegebener Parameter und den Entwicklungen des Modells. Ein großes Interesse liegt auch in der Anpassung von Modellen auf bestimmte Sequenzfolgen, um diese so wahrscheinlich wie möglich aus dem Modell generieren zu können. Dies macht vor allem Sinn für die Modellierung von Signalquellen, welche praktisch nicht untersucht werden können. Das wäre beispielsweise ein Modellentwurf der Produktionsabläufe eines Konkurrenzunternehmens. Allerdings ist diese Fragestellung nicht analytisch zu berechnen, sondern beruht auf Schätzungen und Lernverfahren.

Dies findet im Besonderen in der Spracherkennung große Bedeutung. Mit diesem Verfahren werden HMM für bestimmte Worte oder Klangmuster erzeugt, die die Signalfolgen sehr wahrscheinlich ausgeben. In dem Fall erhält dieser Ansatz auch Unterstützung aus anderen Bereichen, wie beispielsweise den Neuronalen Netzen [Welf04]. Diese Netze erlernen Vorkenntnisse über statistische Verteilungen der Phoneme. Dadurch müssen diese Informationen nicht vorgegeben werden.

Für diese Arbeit ist nur die Kenntnis des Prinzips dieser Problematik von Bedeutung. Dieses Analyseverfahren wurde nicht auf die Methode der Proxel angepasst. Dennoch folgt in Kapitel Experimente eine Diskussion, über die Bedeutung dieser Möglichkeit für SPN. Aus diesem Grund wird im Folgenden die Vorgehensweise des Verfahrens Ansatzweise erläutert. Eine konkretere Beschreibung liefert das Dokument [IEEE89].

Mit Hilfe der Forward-Backward-Variablen lässt sich die Wahrscheinlichkeit  $\epsilon_t(i, j)$  aufstellen, die angibt zum Zeitpunkt  $t$  in Zustand  $S_i$  und zur Zeit  $t + 1$  in  $S_j$  zu sein, mit gegebenem Modell und der Beobachtungsfolge, wie in Bild 2.9 gezeigt. Mit dem Term  $\gamma_t(i)$ , der auch schon für den Viterbi-Algorithmus definiert wurde, kann die Beziehung

$$\gamma_t(i) = \sum_{j=1}^N \epsilon_t(i, j) \quad (2.10)$$

mit der Summe über die Zustandindizes des Folgezustandes hergestellt werden. Summiert man  $\gamma_t(i)$  wiederum über den Zeitindex  $t$ , so lässt sich das als Anzahl der Besuche von  $S_i$  im Verlauf der Sequenz interpretieren. Anders formuliert repräsentiert das die geschätzte Anzahl von Übergängen (Transitionen) die von  $S_i$  ausgehen. Die Summation von

$$\sum_{t=1}^{T-1} \epsilon_t(i, j) \quad (2.11)$$

liefert die geschätzte Anzahl von Transitionen zwischen Zustand  $S_i$  und  $S_j$  für  $t = 1$  bis  $T - 1$ . Diese Erkenntnisse liefern Möglichkeiten für die Schätzungen des Initialvektors  $\bar{\pi}_i$ , die Übergänge zwischen den Zuständen  $\bar{a}_{ij}$  und den Wahrscheinlichkeiten des Auftretens der Symbole  $\bar{b}_j(k)$ .

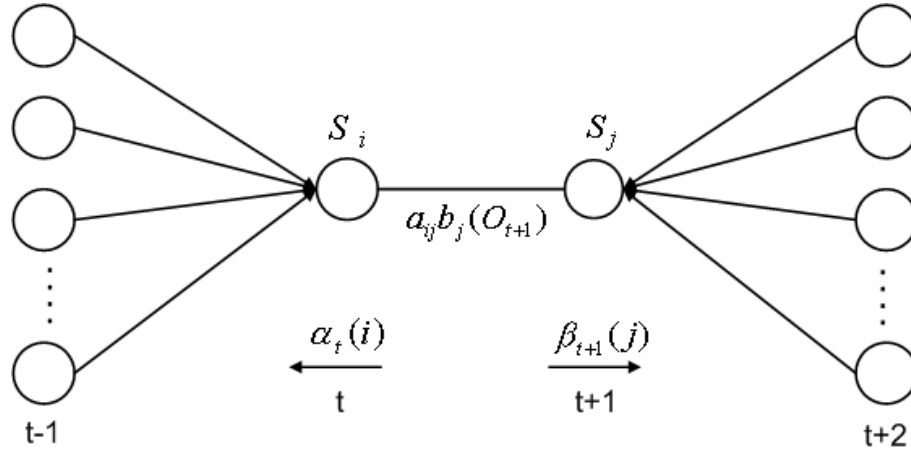


Abbildung 2.9: Illustration von  $\epsilon_t(i, j)$

Nutzt man nun ein initiales Modell mit dessen Parameter als Ausgangsschätzung, so lässt sich nach der Prüfung von Baum und seinen Kollegen ein neues Modell  $\bar{\lambda} = (\bar{A}, \bar{B}, \bar{p}_i)$  berechnen, welches der Bedingung  $P(O|\bar{\lambda}) > P(O|\lambda)$  unterliegt. Wiederholt man diese Prozedur bis sich die Werte nicht mehr ändern, so wird dieser Punkt als maximal wahrscheinlichste Näherung bezeichnet. Es ist jedoch noch darauf hinzuweisen, dass diese Art Gradientenverfahren auch nur lokale Maxima ergeben kann [NN02]. Bei der Güte der Schätzung kommt es deshalb auch immer auf die Wahl der Ausgangsparameter an.

Bisher wurden die Werte für die Ausgabe eines Symbols immer als konstante Wahrscheinlichkeiten beschrieben. Es ist jedoch auch möglich, variable Wahrscheinlichkeiten für den zweiten stochastischen Prozess zu berücksichtigen. Somit können Wahrscheinlichkeiten die aus allgemeinen Verteilungen, wie beispielsweise der Normalverteilung für die Ausgabe eines Symbols oder Merkmalsvektors (Phonems) verwendet werden. Es ist damit möglich, Verzögerungen im zeitlichen Verlauf der Sprache oder möglicherweise lang gezogene Worte oder Teile von Worten zu berücksichtigen und zu modellieren.

Ein Problem besteht jedoch noch zwischen den grundsätzlichen Zustandsübergängen der Markov Modelle. Wie einleitend schon erwähnt unterliegen diese Modelle in erster

Linie der Markov-Eigenschaft. Die Modellierung stochastischer Prozesse durch Markov-Ketten stellt eine Einschränkung der Mächtigkeit gegenüber den SPN dar. Dies wird insbesondere in [HMM04] bemängelt. Somit besteht für die Modellierung und Analyse der Signalmodelle das Interesse allgemeine Verteilungsfunktionen für die Zustandsübergänge verwenden zu können. Dadurch könnten spezifischere Verteilungen für die Beschreibung eines Teilprozesses in die Modelle eingebunden werden. Die Ergebnisse dieser Analysen wären realistischer und genauer.

Nachdem nun ein Basiswissen zu den verschiedenen Verfahren zur Analyse von stochastischen Prozessen vermittelt wurde, beschäftigt sich der nächste Abschnitt mit den Gemeinsamkeiten der Verfahren. Das nächste Kapitel erläutert die konkrete Umsetzung der Anpassung des Proxelalgorithmus.

## 2.4 Zusammenhang zwischen SPN und HMM

Nachdem die Analyseverfahren der HMM für die Untersuchung von Signalmodellen erläutert worden sind, wird in diesem Abschnitt ein Zusammenhang zwischen HMM und SPN verdeutlicht werden. Im Hinblick auf das gesetzte Ziel, die ersten beiden Analyseverfahren der HMM auf SPN anzupassen, erschließt sich diese Verbindung durch die deterministische zeit-diskrete Analyse stochastischer Prozesse. Diese Analyse wird für die SPN mit Hilfe des zustandsraumbasierten Proxelverfahren durchgeführt.

Wie im Abschnitt 2.1.1 erläutert wurde sind die stochastischen Modelle, die durch die HMM modelliert werden können, auch durch SPN abzubilden. Die einzige Ausnahme besteht in der Abbildung des Ausgabeprozesses von Symbolen (zweiter stochastischer Prozess). Hier besteht das Ziel, diese Möglichkeit auch für die SPN zu realisieren. Die SPN ermöglichen, durch ein intuitiv geltendes Konzept der Modellierung und der Verwendung allgemeiner Verteilungsfunktionen für die Zustandsübergänge, die Abbildung von vielen Modellklassen. Aufgrund der höheren Mächtigkeit dieser Modellierung von stochastischen Prozessen, stellt die Analyse von Signalmodellen durch Petri Netze eine Bereicherung dar. Das Proxelverfahren bietet einen Ansatz allgemeine Verteilungsfunktionen für SPN verwenden zu können und sie deterministisch zu analysieren. Durch die zeitabhängige Ermittlung der Wahrscheinlichkeiten, kann aus den Proxeln einer Proxelbaumebene eine Markov-Kette erzeugt werden. Mit Hilfe der Entwicklungswege die das SPN definiert kann das Markov Modell vom Proxelalgorithmus automatisch erstellt werden. Dieses Modell stellt die Entwicklung des Systems bis zum Zeitpunkt  $x$  dar. Die Wahrscheinlichkeiten der Proxel einer Ebene ( $x - \Delta t$ ), welche die gleiche Markierung  $Y$  des SPN repräsentieren werden aufsummiert. Diese Summe der Wahrscheinlichkeiten ergibt die Wahrscheinlichkeit, dass sich das SPN zum Zeitpunkt  $x$  in der Markierung  $Y$  befindet.

Es stellt sich die Frage, ob die Wahrscheinlichkeit eines Proxel, mit einer zusätzlichen Wahrscheinlichkeit für die Ausgabe eines Symbols verbunden werden kann. Der Proxel stellt durch seinen Pfad bis zur Wurzel des Proxelbaums die Wahrscheinlichkeit dar, dass sich das System durch genau diesen Entwicklungspfad in dem Zustand befindet. Die Kombination mit verschiedenen Ausgaben pro Zeitschritt würde bewirken, dass eine

Sequenz von Ausgaben auf genau diesem Entwicklungsweg erzeugt wurde. Damit kann auch für die Transition eines SPN eine Wahrscheinlichkeit für die Ausgabe eines Symbols innerhalb der Zeitschrittweite  $\Delta t$  definiert werden.

Die folgenden Kapitel beschreiben ausführlich die Implementierung der ersten beiden Fragestellungen der HMM unter Verwendung der Proxelmethode. Des Weiteren untersuchen kreierte Experimente den neuen Ansatzes auf seine Eigenschaften und sein Verhalten. Diese Erkenntnisse sollen Hinweise auf die Anwendungsbereiche und zu beachtende Bedingungen der Methode aufzeigen. Abschließende Beispiele zeigen Vor- und Nachteile und unter welchen Voraussetzungen sich der Einsatz der Methode eignet.

## 3 Anpassung des Proxelalgorithmus

Im vorherigen Kapitel sind die Grundlagen für eine neuen Methode der Analyse von Signalmodellen erläutert worden. Es wurde gezeigt, dass die Möglichkeit der Anpassung des Proxelalgorithmus an die erste und zweite Fragestellung der HMM besteht. Dieses Kapitel beschreibt eine Testimplementierung für diese Anpassungen. Mit Hilfe von Beispielen wird die konkrete Berechnung der Analyseergebnisse erläutert. Weiterhin werden die Auswirkungen auf den Proxelalgorithmus diskutiert. Am Ende dieses Kapitels werden Fragen aufgeworfen, die durch die Experimente im nächsten Kapitel beantwortet werden sollen.

### 3.1 Aufgaben und deren Realisierung

Das Ziel des Forward-Backward Algorithmus ist es, die Wahrscheinlichkeit einer vorgegebenen Beobachtungssequenz  $O$ , unter Voraussetzung eines Modells  $\lambda$  zu ermitteln ( $P(O|\lambda)$ ). Dadurch ist es notwendig alle möglichen Entwicklungspfade eines Modells zu evaluieren, die diese Sequenz erzeugen können. Hierzu werden alle sequenzerzeugenden Pfade herausgefiltert und deren Wahrscheinlichkeiten addiert. Diese Summe stellt das Ergebnis von  $P(O|\lambda)$  dar.

Der Viterbi-Algorithmus errechnet den wahrscheinlichsten Pfad der Zustandsänderungen ( $Q$ ) eines Modells. Durch ein Backtracking Verfahren wird der wahrscheinlichste Pfad, der die Beobachtungsfolge  $O$  emittieren kann, ermittelt  $P(Q|O, \lambda)$ .

Um diese Aufgaben umzusetzen wird ein Programm, welches die Proxelmethode implementiert, als Basis der Erweiterungen benötigt. Des Weiteren muss die Folge von Zeitpunkten der Signalausgaben für die Verwendung des zeit-diskret arbeitenden Proxelalgorithmus aufbereitet werden. Außerdem stellen sich Fragen die im folgenden beantwortet werden, wie: Welche Daten und Parameter eines Modells müssen für die Analyse bereit gestellt werden? Wie ist es möglich, diese beiden Fragestellungen mit Hilfe der Proxelmethode zu realisieren? Wie werden die Ergebnisse ermittelt und bereitgestellt? Welche Besonderheiten ergeben sich aus dem Ansatz und welche Vor- und Nachteile bietet diese Herangehensweise?

#### 3.1.1 Erwartungen an die Implementierung und an die angepassten Analyseverfahren

Die Analyse der SPN durch den Proxelalgorithmus und die Berechnung der Wahrscheinlichkeit einer Beobachtungsfolge mittels des FBA werden auf eine ähnliche Weise durchgeführt. Es wird erwartet, dass keine grundlegenden algorithmischen Änderungen des Proxelverfahrens für die Anpassung gemacht werden müssen. Dadurch wird ein ähnliches

Verhalten des Algorithmus in Bezug zu den bisherigen Erfahrungen aus der zu Grunde liegenden Proxelmethode erwartet. Für die Analyse einer Symbolfolge ist die Bedingung sinnvoll, nur sequenzerzeugende Pfade des Proxelbaumes zu untersuchen. Dadurch werden weniger Proxel erzeugt als durch die ursprüngliche Proxelanalyse des Modells. Die Wahrscheinlichkeit der Proxel wird mit einer möglichen Symbolausgabe kombiniert. Dadurch werden die Sequenzwahrscheinlichkeiten mit wachsender Tiefe des Proxelzweiges schneller gegen Null konvergieren als die eigentlichen Proxelwahrscheinlichkeiten.

Durch die Vermutung, nur geringe Veränderungen des Proxelalgorithmus vornehmen zu müssen, wird mit einer einfachen Umsetzung der ersten beiden Fragesellungen für HMM gerechnet. Des Weiteren wird längere Laufzeit der Analyse in Bezug zu den originalen Analyseverfahren der HMM erwartet. Diese Erwartung begründet sich aus dem Proxelansatz, alle möglichen Entwicklungspfade eines Modells zu untersuchen.

### 3.1.2 Basis und Vorbereitung der Analyse

Eine in C geschriebene Implementierung eines Proxel-Simulators wurde als Basis verwendet. Das Programm bildete ein einfaches Petri Netz Modell mit drei Zuständen (siehe Abbildung 2.2) ab. Als Parameter konnten die Schrittweite, Simulationszeit, minimale Wahrscheinlichkeit eines Proxels und die Berechnungsstrategie (Breiten- oder Tiefensuche) manipuliert werden. Das Modell mit dessen zugehörigen Zuständen wurde fest im Programmablauf beschrieben.

Die folgenden beschriebenen Daten müssen vor dem Start der Analyse bereit gestellt werden. Vorausgesetzt wird eine Datenstruktur, in der die Informationen der Wahrscheinlichkeitsverteilungen (Ausgabeverhalten der Symbole) für jeden Zustandsübergang definiert sind. Wie bereits erwähnt, können auch für den zweiten stochastischen Prozess allgemeine Verteilungsfunktionen verwendet werden. Es wäre auch möglich, für die gleichen Transitionen unterschiedliche Verteilungen im Verlauf der Zeit zu definieren. Zusätzlich wird die Proxelstruktur um eine Variable, welche die Sequenzwahrscheinlichkeit repräsentiert, erweitert. Diese beschreibt einen Teil der Wahrscheinlichkeit der Sequenz. Diese Teilsequenzwahrscheinlichkeit gibt an, wie wahrscheinlich die Sequenz auf dem bislang erzeugten Entwicklungspfad des Proxel ist.

Die im vorangegangenen Kapitel vorgestellte Grunddatenstruktur der Proxel wird unverändert übernommen. Damit wird die Definition des Proxel wie folgt erweitert:

$$P = (p, S) , S = (m, \tau, t, P_O)$$

- $m$  Markierungsvektor des SPN ( $m_0$  initial)
- $\tau$  Aktivierungszeitvektor einzelner Transitionen
- $t$  verstrichene Simulationszeit
- $P_O(t)$  Wahrscheinlichkeit der Beobachtungssequenz  $O$  auf diesem Proxelzweig bis zum Zeitpunkt  $t$



Für den Algorithmus wird die zu analysierende Beobachtungssequenz  $O$  benötigt. Diese Signalfolge kann aus vielen Zeitpunkten, an denen ein bestimmtes Signal aufgetreten ist, bestehen. Ein Beispiel dafür ist in Bild 3.1 abgebildet. Jeder dieser Zeitpunkte definiert das Auftreten eines bestimmten Symbols, welches im Alphabet  $(O(o_1, \dots, o_N))$  enthalten ist. Selbstverständlich ist es möglich, dass mehrere Ereignisse das gleiche Symbol produzieren können. Diese Messreihe wird diskretisiert und die übrigen Zeitschritte mit einem so genannten „Null-Symbol“ ( $\emptyset$ ) ergänzt. Dies ist notwendig, da der Proxelalgorithmus auch mit zeit-diskret arbeitet. Die Bedeutung für  $\emptyset$  liegt darin, dass kein Symbol aus dem zuvor definierten Alphabet erzeugt wurde. Die Wahrscheinlichkeit dieser Ausgabe bestimmt sich aus der Differenz von 1 minus der Summe der Wahrscheinlichkeiten der Symbole, die zu diesem Zeitpunkt erzeugt werden können. Damit bleibt man mit

$$\sum_{i=1}^K (O_i(t)), 1 \leq i \leq K, K = \text{Anzahl der Symbole ohne } \emptyset$$

konsistent und es geht keine Wahrscheinlichkeitsmasse verloren.

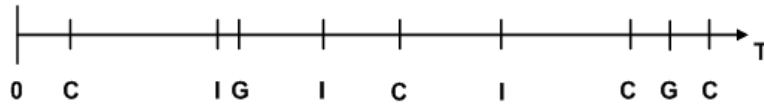


Abbildung 3.1: Beobachtungszeitpunkte aus einem Alphabet ( $O = (C, G, I)$ )

Die Wahrscheinlichkeit der Ausgabe eines Symbols gibt also an, dass das Symbol innerhalb der Zeitspanne  $\Delta t$  ausgegeben werden kann. Wie Bild 3.2 zeigt, resultiert daraus eine diskrete Sequenz, vom Anfangs- bis zum Endzeitpunkt der Folge. Die maximale Schrittweite der Simulation  $\Delta t$  bestimmt sich aus dem kleinsten zeitlichen Abstand zwischen zwei eingänglichen Messzeitpunkten. Diesem Wert muss auch das maximale Diskretisierungsintervall der Signalfolge entsprechen. Diese Bedingung wird aus der Annahme der Proxelmethode formuliert, dass zu einem diskreten Zeitpunkt nur maximal ein Zustandswechsel des Systems stattfindet. Sollte die Schrittweite immer noch zu groß für diese Annahme sein, sollte sie entsprechend der verwendeten Verteilungsfunktionen verkleinert werden. Das Diskretisierungsintervall der Folge muss dadurch ebenfalls auf diesen Wert angepasst werden. Mit diesen Parametrisierungen sind alle Eingangsvariablen für den Algorithmus definiert. Im Anschluss daran kann die Simulation gestartet werden und die Proxel für die Entwicklungswege des Systems erzeugt werden. Wie die Wahrscheinlichkeit der Sequenz parallel zur ursprünglichen Simulation berechnet wird, verdeutlicht der nächste Abschnitt.

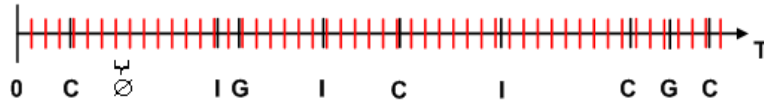


Abbildung 3.2: Diskretisierung der Beobachtungssequenz

### 3.1.3 Wahrscheinlichkeit einer Beobachtungsfolge

Um die Wahrscheinlichkeit der definierten diskreten Beobachtungsfolge zu berechnen, startet der Algorithmus ähnlich dem Ansatz des FBA in einem oder mehreren Anfangszuständen. Es wird der entsprechende Proxel einer Initialemarkierung des SPN gewählt und in die Liste  $Q$  der Proxel eingefügt. Die Wahrscheinlichkeit des Proxel beträgt 1.0. Sollten mehrere Initial-Proxel angegeben werden, so müssen sich die Wahrscheinlichkeiten aller zu 1.0 aufaddieren, um keine Wahrscheinlichkeitsmasse zu verlieren. Die Wahrscheinlichkeitsvariable der Sequenz  $P_O$  startet in allen Initial-Proxeln mit 0.0 für  $t = 0$ , da noch keine Symbol ausgegeben werden konnte. Die Teilsequenzwahrscheinlichkeit eines neuen Nachfolger-Proxel ergibt sich wie folgt. Entsprechend der Simulationszeit  $t$  des Proxel wird das Symbol ( $x$ ), das für diesen Zeitschritt in der vorgegebenen Sequenz  $O$  definiert ist, ermittelt. Die Wahrscheinlichkeit der Emission des Symbols  $o_x(t)$  zum Zeitpunkt  $t$  für den Zustand  $q_j$ , ist  $P(q_j(o_x(t)))$ . Die neue Teilsequenzwahrscheinlichkeit  $P(q_t|O_t, \lambda)$  für den aktuellen Proxel, entspricht der Alpha-Variable aus dem FBA. Sie ergibt sich aus dem Wert der alten Teilsequenzwahrscheinlichkeit des Eltern-Proxels  $P(q_{t-1}|O_{t-1}, M)$ , der Wahrscheinlichkeit des Zustandswechsels  $a_{ij} = P(q_{t+1} = j|q_t = i) 1 \leq i, j \leq N$  (Zuständen) und der Wahrscheinlichkeit des Auftretens des Symbols im Zustand  $j$   $P(q_j(o_x(t)))$  mit:

$$P(q_{t-1}|O_{t-1}, \lambda) * P(q_t|O_t, \lambda) * P(q_j(o_x(t)))$$

Dadurch errechnet sich die Wahrscheinlichkeit der Sequenz  $P(O_T|\lambda)$  bis zu diesem Zeitpunkt  $T$ , aus der Summe der Teilsequenzwahrscheinlichkeiten,

$$\sum_{j=1}^N P(q_j(o_x(t))|O_T, \lambda), 1 \leq j \leq N$$

die durch alle Proxel der Ebene  $T$  auf unterschiedlichen Pfaden erreicht worden sind. Dieses Resultat ist mit dem Wert  $\alpha(t)$  gleichzusetzen.

Das folgende Beispiel verdeutlicht die Berechnung in einem praktischen Zusammenhang. Das Modell stellt ein Restaurant mit einem Tisch dar, an dem drei Menschen sitzen. Diese haben unterschiedliche Trinkgewohnheiten und bestellen im Verlauf des Abends verschieden Getränke. Mit der Analyse soll ermittelt werden, wie wahrscheinlich eine Folge von Bestellungen ist. In diesem Beispiel stehen die Wahrscheinlichkeiten für die Getränkewahl (Signale) jeder Person wie folgt fest:

- Clara(Nichts = 20%, Bier = 20%, Saft = 20%, Limonade = 30%, Kaffee = 10%)
- Georg(Nichts = 10%, Bier = 10%, Saft = 10%, Limonade = 50%, Kaffee = 20%)
- Isac(Nichts = 10%, Bier = 20%, Saft = 30%, Limonade = 30%, Kaffee = 0%)

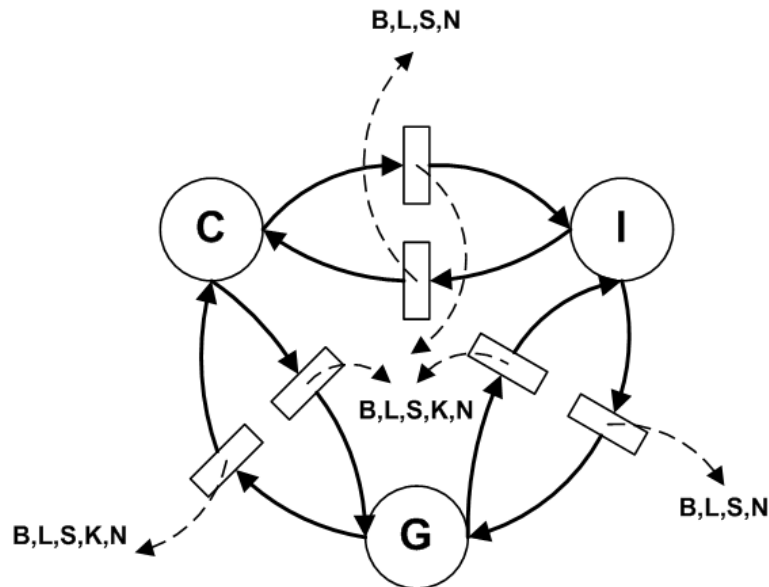


Abbildung 3.3: Petri Netz für das Restaurantbeispiel

Die Zustandsänderungen des Modells beschreiben die Reihenfolge der Bestellungen der einzelnen Personen. Somit sind die Verteilungen für die Übergänge der Zustände nach dem Verhalten der Bestellungen dieser Personen definiert. Das SPN für dieses Beispiel zeigt Abbildung 3.3. Der Initialisierungsvektor soll  $\pi(C, G, I) = (0.7, 0.2, 0.1)$  sein. Damit wird ermittelt, in welcher Markierung das SPN startet. Das bedeutet, dass Clara zu 70 %, Georg zu 20 % und Isac zu 10 % im ersten Zeitschritt ein Getränk bestellen. Sie bestellen nichts, wenn das erste Outputsymbol der Sequenz das „Null-Symbol“ (Nichts) darstellt. Um das Beispiel zu vereinfachen und besser darstellen zu können, sind die Wahrscheinlichkeiten der Übergänge zwischen den Zuständen prozentual fest gewählt (dargestellt in der Matrix  $Z$ ). Die Wahrscheinlichkeiten können auch durch allgemeine Verteilungsfunktion beschrieben werden.

$$Z = \begin{array}{c|ccc} t \setminus t + \Delta t & C & G & I \\ \hline C & 0.5 & 0.2 & 0.3 \\ \hline G & 0.2 & 0.4 & 0.4 \\ \hline I & 0.1 & 0.8 & 0.1 \end{array}$$

Die zu untersuchende diskretisierte Sequenz für dieses Beispiel, soll die Symbole  $O = (B(t = 1), L(t = 2), K(t = 3), N(t = 4), S(t = 5))$  beinhalten. Die Wahrscheinlichkeit für  $P(O(t = 1)|\lambda)$  errechnet sich somit aus:

$$= (\pi_1 * 0.2) + (\pi_2 * 0.1) + (\pi_3 * 0.2)$$

und für  $P(O(t = 2)|\lambda)$

$$\begin{aligned} &= ((\pi_1 * 0.2) * 0.5 + (\pi_2 * 0.1) * 0.2 + (\pi_3 * 0.2) * 0.1) * 0.3 \\ &+ ((\pi_1 * 0.2) * 0.2 + (\pi_2 * 0.1) * 0.4 + (\pi_3 * 0.2) * 0.8) * 0.6 \\ &+ ((\pi_1 * 0.2) * 0.3 + (\pi_2 * 0.1) * 0.4 + (\pi_3 * 0.2) * 0.1) * 0.4 \end{aligned}$$

Im nächsten Zeitschritt wurde definiert, dass das Symbol **N**(ichts) für die Zustandsänderung nach  $I$  nicht erzeugt werden kann, da der Term mit 0.0 multipliziert werden würde. Daraus folgt, dass die Sequenz für diesen Proxelpfad nicht erzeugt werden kann (invalider Pfad). Das bedeutet, dass dieser einzelne Pfad abgeschnitten wird, wie im Bild 3.4 gezeigt. Die entstehenden Pfade hätten keinen Anteil an der Berechnung des Ergebnisses der Signalfolge und sind daher überflüssig. Dadurch wird die Menge der Entwicklungspfade eingeschränkt und die Berechnung im Gegensatz zur Beibehaltung der invaliden Pfade beschleunigt.

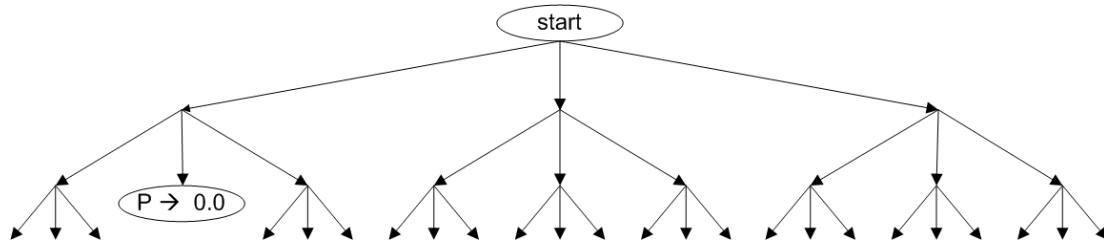


Abbildung 3.4: Entwicklungszweig mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.0

Im Anhang 6.5 zeigt eine Tabelle alle Ergebnisse dieses Beispiels bis zum Ende der vorgegebenen Sequenz.

Betrachtet man nun ein Petri Netz, so werden die einzelnen Symbole der Signalfolge durch die Transitionen ähnlich eines Impulse-Reward (def. Kosten einer Funktion die beim Schalten einer Transition berechnet werden) ausgegeben. Durch die Auswertung der Proxelmethode kann die Wahrscheinlichkeit einer Beobachtungsfolge auch als Symbol-Reward des SPN gesehen werden. Um die wahrscheinlichsten Pfade die diese Signalfolge hervorbringen zu ermitteln, sind die erzeugenden Entwicklungswege dieser Zustandsänderungen zu untersuchen.

### 3.1.4 Berechnung des maximal wahrscheinlichsten Pfades

Nachdem die Wahrscheinlichkeit einer bestimmten Folge von Symbolen berechnet werden kann, ist es interessant welcher Pfad am wahrscheinlichsten durchlaufen wird, um diese zu generieren. Im aktuellen Beispiel hieße das, in welcher Reihenfolge hat wer ( $Q$  Zustandsfolge), wann ein bestimmtes Getränk bestellt ( $P(Q|O, M)$ ). Der Proxelalgorithmus ermittelt alle Entwicklungsmöglichkeiten des modellierten Systems. Damit werden alle Pfade automatisch durch die Simulation erzeugt. Sollten Pfade des Proxelbaumes die Sequenz durch die definierte Parametrisierung nicht erzeugen können, werden sie wie zuvor beschrieben von der weiteren Betrachtung ausgeschlossen. Dadurch erzeugen sie keinen weiteren Berechnungsaufwand.

In dieser Herangehensweise besteht ein Unterschied zum Viterbi-Algorithmus. Es entfällt der Schritt, den maximalen Pfad ausgehend von jedem Zustand zu suchen (vergleiche Gleichung 2.8). Der Vorteil des Proxelverfahrens liegt in der Ermittlung **aller(!)** möglichen sequenzerzeugenden (validen) Pfade. Dies lässt beispielsweise die Analyse des zweit- oder sechst-wahrscheinlichsten Pfades zu. Der Viterbi-Algorithmus bestimmt nur den wahrscheinlichsten Pfad die Sequenz auszugeben. Welchen Nutzen die Analyse mehrerer wahrscheinlicher Pfade haben kann, wird im nächsten Kapitel anhand von Anwendungsbeispielen erläutert.

Zur Veranschaulichung wird das Beispiel der Bestellungen in einem Restaurant aus den vorherigen Abschnitt wieder aufgegriffen. Es soll nun ermittelt werden, welche Personen in welcher Reihenfolge die Bestellungen der Sequenz am wahrscheinlichsten abgegeben haben. Die Tabelle 3.1 zeigt den jeweilig wahrscheinlichsten Pfad zu jedem Simulationszeitschritt, welcher die Sequenz Bier, Limonade, Kaffee, Nichts und Saft ( $O = (B(t = 1), L(t = 2), K(t = 3), N(t = 4), S(t = 5))$ ) erzeugen kann.

<i>Zeit</i>	<i>Pfad</i>	<i>Wahrscheinlichkeit</i>
$t = 1$	$C$	0.14
$t = 2$	$CC$	0.021
$t = 3$	$CIG$	0.002688
$t = 4$	$CIGG$	0.00010752
$t = 5$	$CIGGI$	0.0000129024

(3.1)

Das Ergebnis zu den 5 Zeitschritten kann wie folgt interpretiert werden. Am wahrscheinlichsten ist es, dass Clara ( $C$ ) als erstes ( $t = 1$ ) ein Bier (**B**) bestellt. Folgend gibt der wahrscheinlichste Pfad zu Zeitpunkt  $t = 2$  an, dass Clara noch eine Limonade (**L**) bestellt. Im nächsten Zeitschritt ändert sich jedoch der wahrscheinlichste Pfad der Bestellreihenfolge. Dies ist ein Beispiel dafür, dass eine Greedy-Strategie [Gre] nicht immer zum globalen Optimum führt (vergleiche Abschnitt 2.3.2). Somit interpretiert sich der neue Pfad ab  $t = 3$  im folgt: Am wahrscheinlichsten ist folgendes passiert. Clara bestellt ein Bier, Isac (**I**) bestellt eine Limonade und darauf Georg (**G**) einen Kaffee. Im nächsten Schritt wird keine Bestellung abgegeben (**Nichts**). Innerhalb des nächsten Zeitschrittes bestellt wahrscheinlich Isac einen Saft.

Es wurden für diese Berechnung insgesamt 246 Proxel erzeugt. Da die Matrix  $Z$  keine Übergangswahrscheinlichkeit von 0.0 beinhaltet, sind alle Zustände des Systems als Folgezustände möglich. Dies sollte aber bedeuten das 729 Proxel bis zur Zeit  $t = 5$  erzeugt werden müssten. Da jedoch das Symbol  $\mathbf{S}(\text{aft})$  in Zeitschritt 3 nicht von der Zustandsänderung nach  $I$  erzeugt werden kann, wird dieser Pfad verworfen und es resultiert daraus die oben genannte Anzahl an Proxel. Dies ist ein Beispiel für die Verringerung der Entwicklungsmöglichkeiten des Modells durch die vorgegebene Sequenz. Daraus resultiert ein geringerer Berechnungsaufwand, im Gegensatz zur Verfolgung aller Pfade.

Eine Aufgabe die noch nicht erwähnt wurde, ist die Speicherung der Proxelpfade. Die ursprüngliche Definition eines Proxel beinhaltete in seiner Struktur die Liste der Vorgänger-Proxel [Hor02]. Modelle mit großen Zustandsräumen haben sehr vielen Proxelzweige zur Folge. Die Pfadinformationen innerhalb der Proxelstruktur zu speichern, bringt in diesen Fällen einen imens hohen Speicherbedarf mit sich. Aufgrund der Analyse eines bestimmten Symbols in jedem Zeitschritt, lassen sich gleiche Proxel, wie in der originalen Definition beschrieben, nicht zusammenfassen.

Eine andere Möglichkeit besteht darin diese Daten in einer extern verwalteten Struktur zu speichern und pro Zeitschritt zu aktualisieren. Das realisiert beispielsweise der Viterbi-Algorithmus. Um die zu speichernden Datenmengen der Pfade möglichst klein zu halten, könnten auch Kodierungen oder Codebücher angewandt werden. Hierzu lassen sich verschiedene effiziente Wege der Realisierung finden [IDA04].

Bestehen nach Abschluss der Simulation mehrere sequenzerzeugende Pfade, ist es im möglich ihre Wahrscheinlichkeiten zu vergleichen. Die Analyse des zweit-, dritt- oder sechst-wahrscheinlichsten Entwicklungsweges, für die Ausgabe der Beobachtungsfolge, kann Aufschluss über Alternativen (logistische Prozesse) oder Fehlertoleranzen (sicherheitskritische Anwendungen) liefern. Liegen beispielsweise mehrere ähnlich wahrscheinliche Pfade vor, existiert für einen logistischen Prozess ein alternativer Ablauf.

Durch die Kodierung der Markierungen des Petri Netzes ist anhand der gespeicherten Folge von Zustandsänderungen für den wahrscheinlichsten Pfad, der Verlauf der Marken im Modell bzw. das Verhalten des Systems nachzuvollziehen. Somit lässt sich das Netz auf den maximal wahrscheinlichsten Entwicklungsweg der Symbolfolge hin untersuchen.

Auf die Möglichkeit der Übertragung des dritten Analyseverfahrens der HMM wird in einem Abschnitt des nächsten Kapitels eingegangen. Der Algorithmus basiert auf Schätzungen und das Trainieren von Parametern. Es wird diskutiert, ob es sinnvoll ist, diese Parameterschätzung durch das Proxelverfahren kalkulieren zu lassen.

## 3.2 Erweiterung des Proxelalgorithmus

In diesem Abschnitt soll der adaptierte Proxelalgorithmus im Pseudocode verdeutlicht werden. Es wird noch einmal formal beschrieben, wie die ersten beiden Fragestellungen der HMM mit Hilfe der Proxelmethode in der prototypischen Implementierung berechnet werden. Die verwendeten Variablen sind wie im Original [Hor02] übernommen worden. Auf zusätzliche Ausdrücke wird in den Erläuterungen eingegangen.

Der Grundalgorithmus aus [Hor02] wird durch ein paar neue Variablen ergänzt.

Die allgemeine Funktionsweise bleibt erhalten. Der Initiale Proxel, der in Zeile 7 als erstes in die Liste  $Q$  eingefügt wird, beinhaltet an zweiter Stelle eine weitere Variable  $P_{sq}$ . Sie repräsentiert eine Wahrscheinlichkeit der bis zu diesem Zeitpunkt abgearbeiteten Sequenz. Dieser Wert startet immer mit 0.0. Die Summe  $P(O_t|\lambda) = \sum_{m=1}^M P_{sq}(m, t)$  ( $M$  = Markierungen des SPN) gibt an, mit welcher Wahrscheinlichkeit die vorgegebene Sequenz  $O$  bis zu Zeitpunkt  $t$  durch alle möglichen Pfade erzeugt werden kann. Damit repräsentiert diese Summe die Forward-Variable  $\alpha(t)$ . In Zeile 12 wird dieser Wert für jeden Zeitschritt aktualisiert. In den Zeilen 15 und 20 werden die entsprechenden Folgeproxel mit der berechneten Teilsequenzwahrscheinlichkeit in die Liste der Proxel eingefügt. Wie im nächsten Kapitel noch beschrieben wird, kann dabei die Wahrscheinlichkeit des Proxel und dessen Teilwahrscheinlichkeit der Sequenz auf eine unteren Schranken  $\epsilon_p$  geprüft werden. Es kann dadurch entschieden werden, ob diese Werte noch sinnvoll zum Ergebnis der Analyse beitragen. Die Funktion `getSyProb()` ermittelt die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten des Symbols der zu untersuchenden Signalfolge  $O(t)$  zum Zeitpunkt  $t$  an Transition  $T$ . Dieser Lookup erfolgt aus der dafür bereitgestellten und parametrisierten Struktur (z.B. einem Array). Der größte Wert  $P_{sq}$  eines Proxel auf einer Ebene ( $k\Delta t$ ) im Proxelbaum liefert den wahrscheinlichsten Pfad für die zu untersuchende Sequenz bis zum  $k$ -ten Symbol.

---

**Algorithm 1** Proxelalgorithmus zur Analyse der ersten beiden Fragestellungen

---

```

1: EINGABE: Zeitschrittweite  $\Delta t$ 
2: EINGABE: Ende der Simulationszeit  $T_{max}$ 
3: EINGABE: untere Schranke für Wahrs. des Proxel  $\epsilon_p$ 
4: EINGABE: untere Schranke für Sequenz- Wahrs. des Proxel  $\epsilon_{sq}$ 
5:  $t = 0$ 
6:  $Q \leftarrow \emptyset$ 
7: addProxel (1.0, 0.0,  $m_0$ , 0, 0)
8:
9: WHILE ( $Q \neq \emptyset$ )
10:  $P \leftarrow$  getProxel()
11:    $\pi_{P.m}(P.t) \leftarrow \pi_{P.m}(P.t) + P.p$ 
12:    $\psi_{P.m}(P.t) \leftarrow \psi_{P.m}(P.t) + P.sq$ 
13:
14:   IF ( $P.t \leq t_{max}$ )
15:     addproxel( $P.p * (1 - \Delta \sum_T h_T(\tau))$ ,  $P.p * (1 - \Delta \sum_T h_T(\tau)) *$ 
16:     getSyProb( $P.O_T(t)$ ),  $P.m$ ,
17:     update( $P.\tau$ ,  $P.m$ ,  $\emptyset$ ),  $P.t + \Delta$ )
18:
19:     FORALL  $T$  : if (enabled( $P.m, T$ ))
20:       addproxel( $P.p * \Delta * h_T(\tau)$ ,  $P.p * \Delta * h_T(\tau) *$ getSyProb( $P.O_T(t)$ ), succ( $P.m, T$ ),
21:       update( $P.\tau$ ,  $P.m, T$ ),  $P.t + \Delta$ )

```

---

- Zeile 1:** Eingabe der diskreten Schrittweite  $\Delta t$  für den Proxelalgorithmus
- Zeile 2:** Eingabe der maximalen Simulationszeit
- Zeile 3:** Eingabe der unteren Wahrscheinlichkeit. Ist die Proxelwahrscheinlichkeit kleiner als dieser Wert wird der Proxel nicht erzeugt
- Zeile 4:** Eingabe der unteren Teilsequenzwahrscheinlichkeit. Ist die Wahrscheinlichkeit der Sequenz auf einem Pfad kleiner als dieser Wert wird der Proxel nicht erzeugt
- Zeile 5:** Simulationszeit wird auf 0 gesetzt.
- Zeile 6:** Die Liste der zu bearbeitenden Proxel ist leer.
- Zeile 7:** fügt den Initial-Proxel der die Markierung  $m_0$  des SPN repräsentiert in die Liste Q ein.
- Zeile 9:** Solange Q nicht leer ist wird der folgende Programcode ausgeführt.
- Zeile 10:** teilt dem Proxel P das erste Proxelelement der Liste Q zu und löscht es aus der Liste.
- Zeile 11:** Die Proxelwahrscheinlichkeit des aktuellen Proxel  $P.p$  wird zur Gesamtlösung  $\pi_{P.m}(P.t)$  aufaddiert.
- Zeile 12:** Die Teilsequenzwahrscheinlichkeit des aktuellen Proxel  $P.sq$  wird zur Gesamtlösung  $\psi_{P.m}(P.t)$  aufaddiert.
- Zeile 14:** wenn der Proxel die maximale Simulationzeit nicht überschreitet wird wie folgt weiterverfahren.
- Zeile 15:** fügt einen Nachfolger-Proxel von P in die Liste Q ein. Dieser Proxel repräsentiert in der Markierung des SPN die durch Proxel P beschrieben zu verweilen. Es hat keine Transition gefeuert.
- Zeile 17:** die Aktivierungszeitvariablen der Transitionen die nicht gefeuert haben, werden um ein  $\Delta t$  erhöht.
- Zeile 19:** für alle aktivierten Transitionen Nachfolger-Proxel wie folgt erzeugt.
- Zeile 20:** für jede Entwicklungsmöglichkeit (jede Transition die feuern kann) wird ein Nachfolgeproxel zu P erzeugt.
- Zeile 21:** die Aktivierungszeitvariable der jeweilig gefeuerten Transition wird für den in Zeile 15 erzeugten Proxel entsprechend ihrer Alterungsstrategie geändert.

Nach der Erläuterung der Berechnungsschritte stellt sich die Frage, welche Änderungen sich durch die Analysemöglichkeiten der HMM in der Laufzeit oder im Berechnungsaufwand des Proxelverfahrens gegenüber dem originalen Proxelalgorithmus ergeben.

### 3.2.1 Auswirkungen der Adaption auf das Proxelverfahren

Nach der Anpassung des Proxelalgorithmus an die Fragestellungen der HMM, bestätigen sich die einleitend beschriebenen Erwartungen. Sowohl die erste, als auch die zweite Analyse konnten durch wenige Änderungen in den Proxelalgorithmus integriert werden. Die Arbeitsweise der Proxelmethode wurde nicht beeinflusst.

Der Berechnungsaufwand wurde durch die Berechnung der Teilsequenzwahrscheinlich-



keit für jeden Proxel, um eine lineare Komponente erhöht. Die Laufzeitcharakteristik für ein Signalmodell verhält sich im schlechtesten Fall genau so, wie das gleiche Modell ohne die Erweiterung auf einen zweiten stochastischen Prozess. Dieser Fall würde jedoch nur eintreten, wenn das Signalmodell nur ein Symbol an jeder Transition ausgeben kann. Ist dies nicht der Fall, sinkt die Anzahl der möglichen Entwicklungswege und damit auch die Anzahl der zu erzeugenden Proxel wie erwartet, da invalide Pfade nicht verfolgt werden.

Es konnte auch gezeigt werden, dass die Teilsequenzwahrscheinlichkeiten der einzelnen Proxel schneller gegen null konvergieren, als die Wahrscheinlichkeiten der Proxel selbst. Das begründet sich aus der kombinierten Wahrscheinlichkeit von Proxel- und Symbolwahrscheinlichkeit. Dadurch werden mit wachsender Tiefe (und somit die Länge der Sequenz) der Proxelzweige, die Wahrscheinlichkeiten sehr klein und tragen zu keinen wesentlichen Änderungen am Gesamtergebnis bei. Aus diesem Grund können diese Pfade ebenfalls von der weiteren Analyse ausgeschlossen werden.

Eine wichtiger Teil des Analysealgorithmus ist die Speicherung und Aktualisierung der Zustandspfade. Mit steigender Anzahl der Proxel, kann dies für Modelle mit sehr vielen möglichen Entwicklungswegen, zu einem hohen Speicherbedarf führen. Ein wichtiger Aspekt ist die mögliche gemeinsame Analyse SPN und Signalfolgen. Einerseits kann ein Simulationsmodell, wie in [Hor02] beschrieben, untersucht werden. Andererseits bietet sich die gleichzeitige Analyse von Ausgaben des Systems an. Sollten beide Untersuchungen mit einem Simulationslauf analysiert werden, entfällt der Vorteil der Eindämmung der zu untersuchenden Entwicklungspfade. Auch wenn die Sequenz über den Entwicklungspfad erzeugt werden kann, ist er für die Analyse des SPN wichtig. Im schlechtesten Fall bedeutet das einen exponentiellen Berechnungsaufwand, der momentan durch wenige Methoden eingeschränkt werden kann. Ein zusätzlicher Aufwand besteht dann noch in der Berechnung der Sequenzwahrscheinlichkeiten.

Welche Signalmodellstrukturen sich im Besonderen für die Analyse durch die Proxelmethode eignen, wird im nächsten Kapitel durch Experimente untersucht. Es geht in diesen Untersuchungen nicht um ein direkten Vergleich der Analysemethoden (HMM und Proxel), sondern mehr um die Untersuchung der Möglichkeiten, die sich durch die erfolgreiche Anpassung der Themenbereiche der HMM an SPN bieten. Das nächste Kapitel geht auf diese Möglichkeiten ein und beleuchtet Erwartungen, welche an das angepasste Proxelverfahren gestellt werden können.

### **3.3 Was wurde durch die Anpassungen erreicht**

Der wohl bedeutendste Vorteil der Proxelmethode gegenüber der HMM liegt darin, dass das stochastische Signalmodell nicht mehr markovsch sein muss. Mit Hilfe des Proxelalgorithmus wird ein Petri Netz zeit-diskret abgebildet. Mit den ermittelten Wahrscheinlichkeiten der Proxel kann ein Markov Modell erstellt werden. Dadurch ist die Verwendung von allgemeinen Verteilungsfunktionen für die Übergänge der Zustände und der Ausgabe der Symbole möglich. Wie im vorherigen Kapitel 2 erwähnt, muss durch diese Eigenschaft das zeitlich relevante Verhalten des Systems nicht mehr explizit durch die Zustände der Markov-Kette modelliert werden. Das grenzt die Komplexität der stochas-

tischen Modelle in Bezug auf den Modellierungsaufwand, der sonst für HMM entstehen würde, ein.

Dieses Verfahren stellt eine sehr große Bereicherung der Abbildungsmöglichkeiten für reale oder hypothetische Systeme bereit. Modellkomponenten, welche bekannten Wahrscheinlichkeitsverteilungen unterliegen, lassen sich präzise und einfach in die Modelle integrieren. Durch die Ermittlung der möglichen Entwicklungswege zu jedem einzelnen Zeitschritt und die Speicherung von Alterungsvariablen für die Verteilungsfunktionen, wird dem Nutzer das entsprechende Markov-Ketten Modell automatisch erstellt. Der Proxelalgorithmus macht einen stochastischen Prozess markovsch. Ein zu modellierendes Petri Netz maskiert (vereinfacht) die Entstehung eines sonst resultierenden komplexen HMM.

Dennoch ist zur Verwendung von allgemeinen Verteilungsfunktionen und ihrer Alterungsstrategie in Bezug auf die Ermittlung der Sequenzen folgendes zu erwähnen. Im vorangegangenen Kapitel wurde auf das Eintreten der Übergangswahrscheinlichkeit von 0 eingegangen. In diesem Fall wurde der Entwicklungspfad von der weiteren Berechnung ausgeschlossen. Für HMM sind die Entwicklungsmöglichkeiten durch die festen Wahrscheinlichkeiten vorauszusehen. Daher kann der Berechnungsaufwand schon vor der Analyse abgeschätzt werden.

Unter Verwendung allgemeiner Verteilungsfunktionen tritt dieses Szenario der Teilsequenzwahrscheinlichkeiten von 0, hauptsächlich bei so genannten steifen Verteilungsfunktionen [BGdMT] auf. Ein Beispiel dafür liefert die Verwendungen einer uniformen oder deterministischen Verteilung. Diese würden mit Hilfe der *hazard-rate-function* keinerlei Fluss von Wahrscheinlichkeit (sprich 0) liefern, solange die entsprechend definierte Zeit der Aktivierung nicht verstrichen ist. In diesem Fall wird der theoretisch mögliche Zustand des Systems nicht erzeugt. Das bedeutet, dass es über diese zeitliche Entwicklung der Knoten im Proxelbaum nicht möglich war den Zustand zu erreichen und die zu untersuchende Sequenz auf diesem Weg zu erzeugen. Die Wahrscheinlichkeit der Sequenz endet im Wert 0 und wird aus der weiteren Untersuchung ausgeschlossen. Die Parametrisierung in denen dieser Fall auftritt, schränkt die Menge der entstehenden Pfade stark ein. Daraus resultiert der Vorteil der Ersparnis von weiterem Berechnungsaufwand der sonst entstehenden Teilbäume.

Es kann aber nicht zwingend erwartet werden, dass Netze welche diese Art von Funktionen verwenden, schneller als andere berechnet werden. Hierbei kommt es auf die Parametrisierung der restlich verbleibenden Verteilungen und die Struktur des Modells an. Dennoch entsteht bei Modellen mit ausschließlicher Verwendung dieser Art von Funktionen eine kleine Menge von möglichen Pfaden. Wie sich die Parametrisierungen der Modelle noch auswirken und welche anderen Einflussfaktoren für die Analyse von Vorteil sind, wird in den Experimenten im folgenden Kapitel beschrieben.

Ein großer Unterschied zwischen den Verfahren der HMM und der Methode der Proxel liegt in den notwendigen Eingaben. Die HMM setzen den Zustandsraum des Modells in endlicher Form voraus. Auf dieser Basis werden die Modelle mit Hilfe iterativer und rekursiver Algorithmen ausgewertet. Der Proxelalgorithmus setzt eine Definition der möglichen Entwicklungen aus jedem Zustand voraus (beschrieben durch das SPN) und baut damit eine Baumstruktur für diese Entwicklung auf. Unter Verwendung des Prinzips

der „supplementary variables“ kann so das zeitlich abhängige Modell entwickelt werden. So betrachtet sind alle Entwicklungen des Proxelbaums in jedem Zeitschritt auch eine Markov-Kette. Die Bedeutung der Zustände dieser Kette beschreiben die möglichen Alterungen der Zustandsübergänge. Werden alle Proxel nach der kompletten Bearbeitung eines Zeitschrittes  $k\Delta t$  betrachtet, können daraus die Zustände und Übergangswahrscheinlichkeiten, die für jede Entwicklung aus den allgemeinen Verteilungsfunktionen des Modells ermittelt werden.

Nachdem die grundlegende Funktionsweise verdeutlicht geworden ist, werden nun die Eigenschaften der Methode im Vergleich zu den HMM diskutiert. Es werden Einflüsse von Modellen und deren Parameterwahl untersucht, welche zeigen sollen, ob die jeweilige Modelltypen sich für die Anwendung der Proxelmethode eignen. Verschiedene Beispiele bringen die zur Untersuchung entworfenen Modelle, mit praxisrelevanten Einsatzmöglichkeiten in Verbindung.

## 4 Experimente und Anwendungsgebiete

Einleitend beschreibt das Kapitel einige Fragen, welche durch die Experimente beantwortet werden sollen. Es werden die zu untersuchende Parameter für Signalmodelle erläutert. Danach werden die durchgeführten Experimente beschrieben. Ein weiterer Abschnitt gibt Empfehlungen, für welche Arten von Signalmodellen sich die entwickelte Methode eignet. Abschließend werden Ideen für weitere Analysen von Signalmodellen vorgestellt.

### 4.1 Anwendungsbeispiel für Signalmodelle

Ein für HMM eher ungewöhnliches Aufgabengebiet ist das Projektmanagement. Für die Überwachung eines Projektplans ist es wichtig früh einschätzen zu können, ob ein zuvor angenommener und festgelegter Ablaufplan entsprechend der Spezifikationen und Deadlines eingehalten werden kann. Im diesem Beispiel werden die Parameter eines Projektplans wie folgt interpretiert, um ein Signalmodell darzustellen. Verschiedene zu bearbeitende Aufgaben des Projekts werden als Stellen eines Petri Netzes modelliert. Bei Erreichen dieser bestimmten Meilensteine im Verlauf des Projekts, werden Signale über die Qualität oder den Bearbeitungsstand der zu erfüllenden Aufgaben ausgegeben. Die Transitionen bilden die Bearbeitungszeit für die Teilaufgaben ab. Für derartige Analysen können Architekturen, wie die left-right Modelle (siehe Abschnitt 4.3.6) oder Modelltypen mit alternativen Entwicklungspfaden (siehe Abschnitt 4.3.3) verwendet werden. Diese Varianten werden in der Beschreibungen der Experimente im folgenden erläutert.

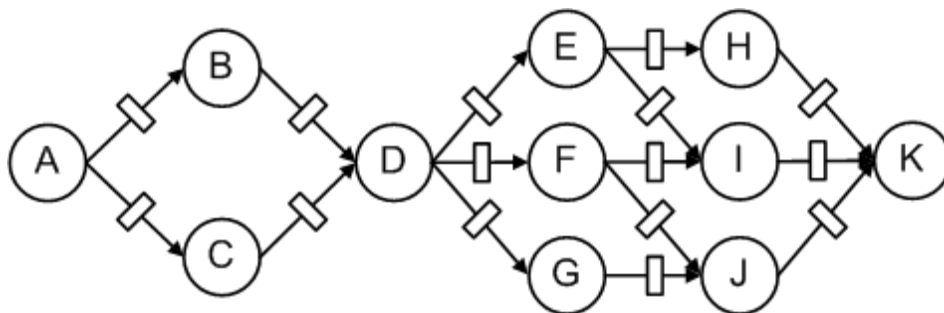


Abbildung 4.1: Repräsentation eines Projektplans durch ein Petri Netz

Durch das Modell können unterschiedliche Abläufe eines Projekts stattfinden. Die Information aus einer Analyse eines Projektplanes als Signalmodell, ermöglichen Vorher-

sagen über Entwicklungen oder Strategiewechsel. Es kann analysiert werden, wie wahrscheinlich der Projektabschluss in der noch verbleibenden Zeit ist und welche Projektplanvariante dafür am wahrscheinlichsten verfolgt werden sollte, um das Ziel zu erreichen.

Die Abbildung 4.1 zeigt das Petri Netz für das hier beschriebene Beispiel. Die vorgegebene Signalfolge für die Analyse entsteht hierbei durch Erfahrungen aus vergangenen Projektverläufen oder aus festen Zeitvorgaben für bestimmte Teilziele. Abbildung 4.2 zeigt eine Beispielfolge.

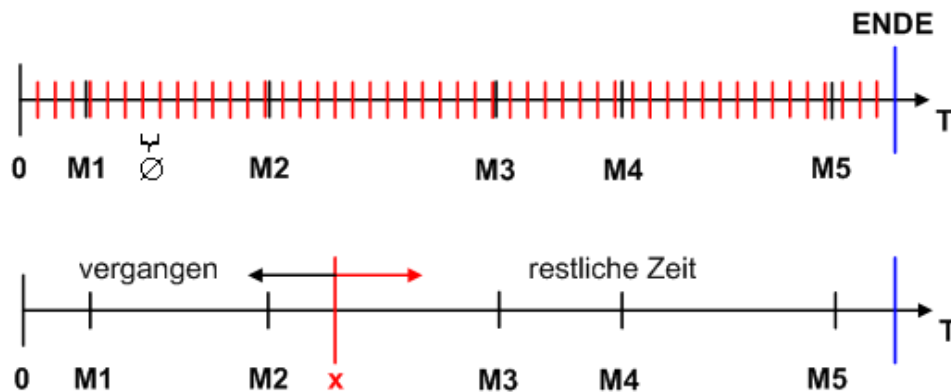


Abbildung 4.2: Signalfolge der Meilensteine eines Projektverlaufs

Die Analyse des Petri Netzes wird einen maximal wahrscheinlichen Pfad für die Projektablauf mit Ausgabe der, aus der Sequenz vorgegebenen Signale, ermitteln. Wird das Projekt schon für eine Zeit  $x$  bearbeitet, so kann der wahrscheinlichste Pfad, von diesem Zeitpunkt ab, neu analysiert werden. Das würde bedeuten zu analysieren, welcher Projektverlauf ab diesem Zeitpunkt  $x$  am wahrscheinlichsten ist. Wie Abbildung 4.2 gezeigt, wird für die verbleibende Zeit eine neue Signalfolge definiert. Die verstrichene reale Zeit wird auch für die Signalfolge abgeschnitten, da weniger Zeit für den Abschluss des Projektes verbleibt. Die Analyse des Petri Netzes startet nun von einem Zustand aus, der die aktuelle Projektphase beschreibt.

Die Ergebnisse der zweiten Analyse geben Rückschlüsse auf den wahrscheinlichsten Projektverlauf und dessen Wahrscheinlichkeit auf Basis der vergangenen Erfahrungen (vorgegebene Sequenz).

## 4.2 Parameter der Untersuchungen

Es sollen folgende Fragen mit Hilfe der Experimente beantwortet werden. Welchen Einfluss haben allgemeine Verteilungsfunktionen auf die Analyse von Signalmodellen? Werden Modelle mit wenigen möglichen Zustandsänderungen schneller analysiert, als Modelle mit vielen Änderungsmöglichkeiten? Wie beeinflusst es den Berechnungsaufwand,

wenn sehr viele Signale in jeder Transition des Petri Netzes ausgegeben werden können? Wie verhalten sich Modelle, in denen ein bestimmtes Symbol nur durch eine Transition ausgegeben werden kann?

Aus den Ergebnissen der Untersuchungen sollen Schlussfolgerungen über vor- und nachteilige Anwendung des erarbeiteten Ansatzes gezogen werden. Daraus ergeben sich Empfehlungen, unter welchen Bedingungen sich die Analyse von Signalmodellen durch die Proxelmethode anbietet.

### 4.3 Experimente und Einflussfaktoren für Signalmodellen

Die folgenden Experimente sollen verschiedene Parameter untersuchen, die vor- oder nachteilige Auswirkungen auf den Berechnungsaufwand der Analyse durch den Proxelalgorithmus verursachen. Dadurch war es notwendig, verschiedene Modellvarianten für die Untersuchungen zu erstellen. Es gibt jedoch keine Klassifikation von HMM oder SPN. Dadurch war es auch Teil der Arbeit, repräsentative Beispiele zu wählen, die eine große Anzahl an möglichen Modellierungsvarianten abdecken. Mit der Untersuchung von geeigneten Modellen sollen Aussagen über Einflüsse der Parameter auf den Berechnungsaufwand getroffen werden.

Im folgenden wird erläutert, welche Parameter der Signalmodelle untersucht wurden, um die oben genannten Fragen beantworten zu können. Durch den Fokus auf die Signalfolge, wird eine ähnliche Laufzeit für den angepassten Algorithmus, wie für den ursprünglichen Proxelalgorithmus erwartet. Diese Erwartungen betreffen das exponentielle Wachstum der Entwicklungspfade, bei Modellen mit vielen Entwicklungsmöglichkeiten. Es werden mit der Untersuchung der Signalfolge keine Proxel zusammengefasst. Daher sollte sehr viele Proxel erzeugt werden müssen und damit sehr hohe Laufzeiten verursachen. Dennoch können die Entwicklungsmöglichkeiten durch Pfade, die die Sequenz nicht erzeugen, beschränkt werden. Es soll untersucht werden, welche Einflüsse die Parametrisierungen der Signalausgaben auf den Berechnungsaufwand haben.

Die unten beschriebenen Modellvarianten verwenden allgemeine Verteilungsfunktionen. Die Emissionswahrscheinlichkeiten der Symbole wurden zunächst mit prozentualen Werte parametrisiert. Es ist offensichtlich das die Wahl der Symbolwahrscheinlichkeiten direkten Einfluss auf die Berechnungen der Sequenzwahrscheinlichkeiten haben. Durch die Änderung der Symbolwahrscheinlichkeiten sollen die Einflüsse der Signalparameter auf die Entwicklungsmöglichkeiten des Modells (Anzahl der sequenzerzeugenden Proxel-pfade) untersucht werden.

Es wurden deterministisch oder uniform verteilte Transitionen untersucht, um ein steifes Verhalten der Übergänge zu erhalten. Es soll untersucht werden, wie viele valide Pfade noch entstehen. Es wurde in den Experimenten versucht möglichst sinnvolle Parametrisierungen zu verwenden. Damit sollte das Verhalten der Methode für realistische Problemstellungen untersucht werden. Würden die Parameter willkürlich gewählt, so resultieren daraus möglicherweise unsinnige und aussagenlose Ergebnisse.

Es sollten Experimente durchgeführt werden, die besonders wahrscheinliche Pfade hervor bringen. Damit sollten Einflüsse auf Differenzen der Wahrscheinlichkeiten zwischen

den wahrscheinlichsten Pfaden untersucht werden. Auf der anderen Seite sollten möglichst kleine Wahrscheinlichkeiten für Sequenzen und Pfade generiert werden. Daraus sollten Erkenntnisse gewonnen werden, bis zu welcher Folgenlänge noch praxisrelevante Werte im Bezug zum Modell entstehen. Diese Untersuchungen sollten auch Aufschluss über die Eindämmung des Berechnungsaufwand liefern. Es wird untersucht, in welchen Fällen Pfade durch zu geringe Wahrscheinlichkeitswerte nicht weiter verfolgt werden.

Es gibt verschiedene Größen, um die Ergebnisse der Untersuchungen zu beurteilen. Im Vordergrund steht die benötigte Rechenzeit. Ein zweiter Wert ist die Anzahl der erzeugten Proxel für jeden Zeitschritt. Entstehen in wenigen Zeitschritten extrem viele Proxel, so beinhaltet das Modell viele Entwicklungsmöglichkeiten. Diese verursachen folglich eine hohe Analysezeit und stellen eine weniger empfehlenswerte Parametervariante bei der Analyse mit Hilfe der Proxelmethode dar. Diese aufwendigen Modelle wurden durch die Änderung der Symbolparameter auf die Einschränkung der Entwicklungspfade untersucht. Dadurch konnten die Entwicklungen mit den vorherigen Ergebnissen verglichen und die Änderungen beurteilt werden.

Weiterhin wurden die zu analysierenden maximalen Folgelängen betrachtet. Es wurden keine Folge-Proxel erzeugt, wenn die Teilsequenzwahrscheinlichkeiten (TSW) der Proxel aufgrund der Parametrisierung unter eine Wahrscheinlichkeitsschwelle von  $10^{-50}$  fielen.

Die Modellklassen der Experimente wurden mit Ideen für Beispielanwendungen verknüpft.

#### 4.3.1 Erwartungen an die Werte der Ergebnisse

Das Beispiel aus dem Abschnitt 3.1.4 zeigt schon eine Verringerung der Entwicklung im Proxelbaum. Hier wurde die Anzahl der zu berechnenden Proxel im Zeitschritt 2 um  $1/3$  kleiner, da das zu generierende Symbol der Folge durch eine Zustandsänderung nicht erzeugt werden konnte. Nehmen wir an, dieses Modell lässt sowohl alle Entwicklungen durch Zustandsübergänge und auch durch Symbolausgaben zu. Es müssten bei 150 Zeitschritten ca.  $5.55^{71}$  Proxel erzeugt werden. Kann dabei für jeden 20-ten Schritt in einem Zustand das zu generierende Symbol nicht erzeugt werden, verringert sich der Aufwand auf ca. 4%. Diese Abschätzung sollte jedoch noch bei weitem übertroffen werden. Es wird extrem viele Proxelzweige geben, die nach wenigen Zeitschritten unter eine Wahrscheinlichkeitsschwelle fallen und nicht weiter betrachtet werden. In den Experimenten wurden meist nur Millionen von Proxeln erzeugt. Wie viele Entwicklungspfade pro Zeitschritt, durch nicht mehr relevanten Wahrscheinlichkeitsanteil am Gesamtergebnis, nicht weiter betrachtet werden, bestimmt sich aus den Symbol- und Übergangswahrscheinlichkeiten. Als Beispiel wird das jeweilig Symbol der Sequenz mit einer Wahrscheinlichkeit von 10% ausgegeben. Betrachtet man einen Pfad in dem jeder Zustandsübergang eine Wahrscheinlichkeit von 4% hat, wird nach 18 Zeitschritten die Wahrscheinlichkeitsschwelle von  $10^{-50}$  erreicht und der Pfad nicht weiter betrachtet.

Welche Erwartungen können an die Sequenzwahrscheinlichkeiten und die Pfadwahrscheinlichkeiten gestellt werden? Das folgende Beispiel soll dies in ein paar Zahlen ausdrücken. Angenommen es existiert ein Pfad, der für alle Zustandswechsel eine Wahrscheinlichkeit von 90% liefert und die Signalfolge erzeugen kann. Die Symbole die er-

zeugt werden haben ebenfalls jeweils eine Emissionswahrscheinlichkeit von 90%. Somit ergibt sich nach der Sequenzlänge von 150 Symbolen eine Wahrscheinlichkeit für diesen Pfad von  $1.8739^{-14}$ . Das soll zeigen, welche Werte bei einer entsprechenden Länge der Sequenz zu erwarten sind.

### 4.3.2 Experiment 1

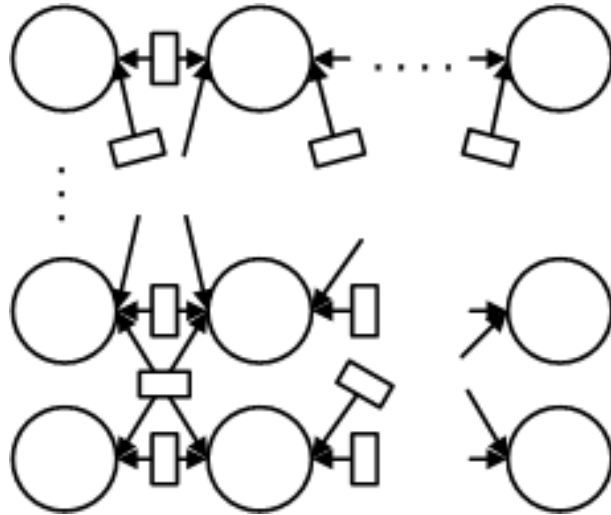


Abbildung 4.3: Modell in dem jeder Zustand durch jeden erreicht werden kann

Das erste Experiment untersuchte das angepasste Proxelverfahren auf eine bekannten Problematik des ursprünglichen Proxelverfahrens. Darum stellt die erste Modellvariante einen der schlechtesten Fälle für die Methode der Proxel dar. Eine Parametrisierung bei der alle Zustände des Modells aus jedem Zustand erreicht werden können, hat ein exponentielles Wachstum des Zustandsraums zur Folge. Bei der Betrachtung von über 50 Zeitschritten der Signalfolge führt das zu zeitaufwendigen Berechnungen. Sollten die Wahrscheinlichkeiten für die Ausgabe der Symbole auch nahezu gleich verteilt sein, so wird der exponentielle wachsende Aufwand nicht eingeschränkt, wodurch folglich viele mögliche sequenzerzeugende Pfade entstehen. Sollte jede Transition alle Symbole des definierten Alphabets erzeugen können, so wird das Modell die Sequenz über alle möglichen Pfade erzeugen können. Diese Symbolfolgen werden jeweils auch mit einer geringen Wahrscheinlichkeit erzeugt werden, da sich der Anteil der Gesamtwahrscheinlichkeit auf sehr viele Entwicklungspfade verteilt. Dadurch könnten in diesem Experiment keine Sequenzfolgen mit mehr als 50 Zeitschritten analysiert werden. Zusätzlich unterscheiden sich die Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Entwicklungspfade nicht wesentlich. Dadurch sind schwer Aussagen über Vorzüge bestimmter Entwicklungen zu treffen, es sei denn diese Breite von Optionen des Systems wird erwünscht (für das Experiment 1 mit 5 Sym-



bolen pro Transition ergaben sich 4 Millionen sequenzerzeugende Pfade im Zeitschritt 11).

Die Entwicklung der bearbeiteten Proxel pro Zeitschritt zeigt die Kurve „10 Symbole“ in Abbildung 4.4. Der Graph steigt in kurzer Zeit sehr schnell an, da viele Entwicklungswege (pro Proxel ca. 9 Folge-Proxel) möglich sind. Durch die Verteilung der einzelnen Symbolwahrscheinlichkeiten resultieren kleine Werte, da jede Transition alle Symbole erzeugen kann. Dadurch fallen die TSW in wenigen Zeitschritten unter die Wahrscheinlichkeitsschwelle und werden nicht weiter verfolgt. Die Signalfolge wird dadurch nur auf einer geringen Länge analysiert.

Steigt die Anzahl der Zustände noch weit über die des Beispiels (9), so eignet sich die Auswertung dieser Parametrisierung mit Hilfe der Proxel, aufgrund der Zustandsraumexplosion und den zu kleinen TSW nicht. Dadurch bestätigten sich die anfänglichen Erwartungen für diese Architekturen, auch für die Analyse von Signalmodellen.

Mit einer Parametrisierung, die bestimmte Symbole der Sequenz nur an einigen Transitionen erzeugen können, werden die Entwicklungsmöglichkeiten stark eingeschränkt. Es entstehen weniger mögliche sequenzerzeugende Pfade. Sollten diese Zustandsänderungen sehr wahrscheinlich sein, werden mehrere valide Pfade mit hoher Wahrscheinlichkeit erzeugt. Die Kurve „5 Symbole“ in Abbildung 4.4 zeigt in Vergleich zum eben beschriebenen Graph ein viel stärkeres Wachstum der bearbeiteten Pfade. Dies begründet sich darin, dass die Signalwahrscheinlichkeiten der Transitionen auf weniger Symbole verteilt sind und somit größer ausfallen. Es entstehen mehr sequenzerzeugende Pfade, die erst nach mehreren Zeitschritten unter die Wahrscheinlichkeitsschwelle fallen.

Es kann aber auch, aufgrund der vielen möglichen Zustandsänderungen, ein großer Anteil der Wahrscheinlichkeitsmasse in invaliden Pfaden verloren gehen. Der Graph „1 Symbol“ in Abbildung 4.4 zeigt die Entwicklung, in der nur ein bestimmtes Symbol durch eine bestimmte Transition erzeugt werden konnte. Es entstehen wieder mehr Pfade durch die größeren Symbolwahrscheinlichkeiten, als in ersten Fall. Dennoch resultieren weniger Pfade durch die geringen Möglichkeiten die Sequenz zu erzeugen, als in der beschriebenen zweiten Parameterwahl.

Durch die ausschließliche Analyse valider Pfade und das ignorieren von Pfaden mit zu kleinen Symbolwahrscheinlichkeiten, kann die Zustandsraumexplosion stark eingedämmt werden. Dadurch liessen sich diese Modellvarianten unter den genannten Bedingungen in wenigen Sekunden (30 - 50) analysieren.

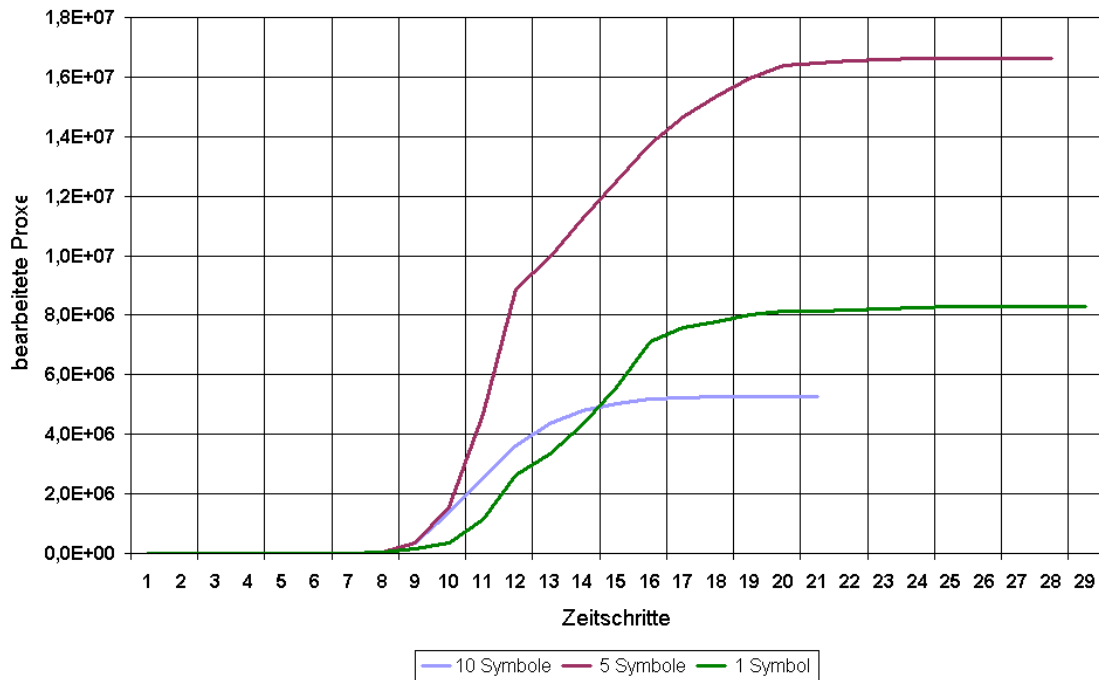


Abbildung 4.4: bearbeitete Proxel pro Zeitschritt für Experiment 1 (Variation der Anzahl der Symbole die pro Transition erzeugt werden können)

Ein Anwendungsbeispiel für diese Modellvariante wäre folgendes. Ein Unternehmen liefert in einem Gebiet bestimmte Produkte aus. Durch Messungen oder Erfahrungen, ist das Kaufverhalten der Kunden an verschiedenen Orten bekannt. Zu modellieren ist ein System, welches die Verbindungen der Orte und deren Wahrscheinlichkeit zwischen Ihnen hin und her zu pendeln repräsentiert. Mit diesen Vorraussetzungen lässt sich der wahrscheinlichste Pfad für den Anbieter in Bezug auf diverse Bezüge der Kunden ermitteln. Der zeitliche Aspekt zwischen den Käufen lässt in die Analyse mit ein.

### 4.3.3 Experiment 2

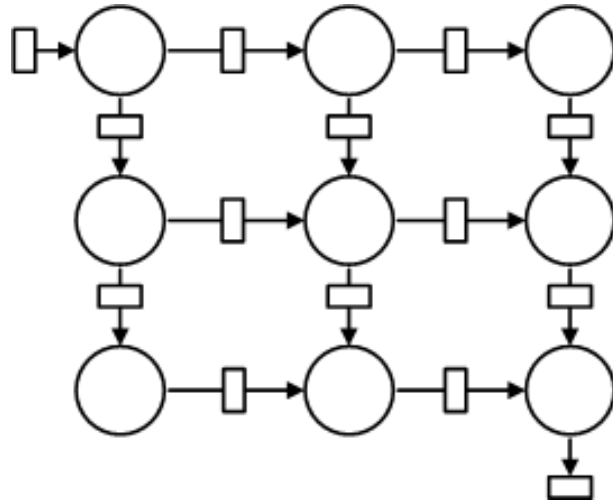


Abbildung 4.5: Modell mit Alternativen aber gerichteten Entwicklungen

Das zweite Modell wurde durch die Beschreibung der Prozesse, die auf diese Art modelliert werden können inspiriert. Eine Symbolreihe repräsentiert einen bestimmten Prozess für den, beispielsweise Signale durch den Abschluss einer Teilaktivität des Prozesses ausgegeben werden. Kombiniert man mehrere Symbolreihen in einer Sequenz, repräsentiert dies eine gleichzeitige Abarbeitung von mehreren Prozessen. Durch die Definition der Signalausgaben jeder Transitionen erlaubt das System alternative Entwicklungsmöglichkeiten für die Prozessbearbeitung.

Anders als die vollverbundene Variante wird hier schon eine Entwicklungsrichtung erzwungen. Prinzipiell beschreibt diese Modellvariante eine Mischung zwischen den left-right Modellen (Abschnitt 4.3.6) und den vollverbundenen Modellen (Abschnitt 4.3.2). Ein Beispiel dafür sind Systeme (Produktionslinien einer Fabrik), in denen mehrere unterschiedliche Abläufe nebeneinander stattfinden. Diese Teilaktivitäten sollen jedoch in der Gesamtheit des Systemverhaltens untersucht werden. Dadurch ist mit den begrenzten alternativen Entwicklungsmöglichkeiten ein Rahmen von möglichen Pfaden zur Generierung der Signalfolge gespannt. Die gerichteten Entwicklungsmöglichkeiten grenzen das exponentielle Wachstum gegenüber der ersten Modellvariante imens ein. Dies kann durch die Parametrisierung der Symbolausgaben, wie in Experiment 1 beschrieben, noch unterstützt werden.

Wie Abbildung 4.6 zeigt, werden in diesem Experiment deutlich weniger Proxel erzeugt, als im Experiment 1. Es wurden die Transitionen zum einen durch eine Weibull-Verteilung und zum anderen durch eine Uniform-Verteilung homogen parametrisiert. Dadurch entstand eine Parameterwahl, in der der Wechsel in einen erreichbaren Zustand erst sehr gering wahrscheinlich ist und mit zunehmender Verweilzeit ansteigt (weibull)

und zum anderen linear wahrscheinlicher wird (uniform). Damit sollte untersucht werden wieviel Entwicklungsmöglichkeiten entstehen und wie weit die Signalfolgen analysiert werden könne. Wie auch im Experiment 1 wurde die Anzahl der Symbole, die jeder Transition ausgeben kann variiert.

Das Verhalten durch die Änderung der möglichen Symbolausgaben pro Transition gleich dem Verhalten aus Experiment 1 und begründet sich auch auf die dort beschriebene Weise. Für die uniform-verteilte Variante konnten deutlich längere Folgen analysiert werden. Dies lag an den resultierenden Wahrscheinlichkeiten der Transitionsverteilung. Im Gegensatz zu der Weibull-Verteilungsvariante liefert die Uniform-verteilte Parametervariante größere Wahrscheinlichkeiten für kürzere Verweilzeiten. Es entstanden dadurch weniger sequenzerzeugende Pfade. Die TSW sanken schnell unter die Wahrscheinlichkeitsschwelle und die Pfade wurden nicht weiter verfolgt.

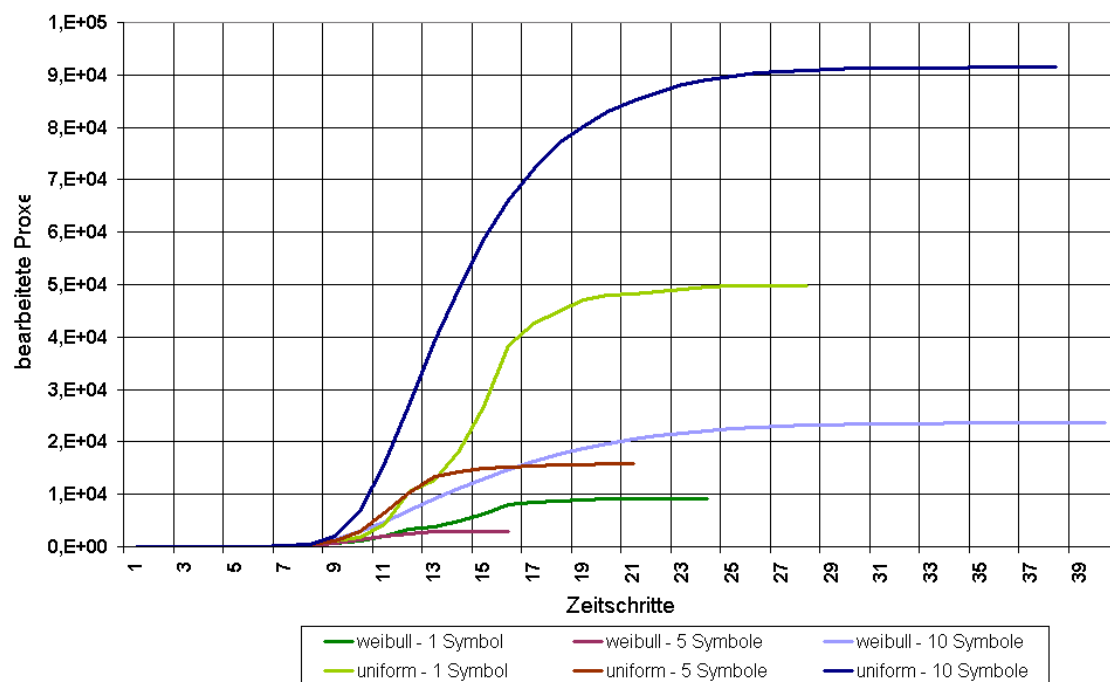


Abbildung 4.6: bearbeitete Proxel pro Zeitschritt für Experiment 2 (Variation der Anzahl der Symbole die pro Transition erzeugt werden können)

Es konnten auch lange Beobachtungsfolgen (zwischen 100 und 150 Symbolen = Tiefe des Baumes) in wenigen Sekunden analysiert werden. Diese resultierenden Sequenzwahrscheinlichkeiten fielen jedoch extrem klein aus ( $10^{-70}$  -  $10^{-150}$ ). Der Umfang des Berechnungsaufwandes wird durch die Anzahl der möglichen Entwicklungen des Systems bestimmt und hängt somit von den Transitions- und Symbolwahrscheinlichkeiten ab.

Als Beispiel kann das folgende Szenario betrachtet werden. Ein Supermarkt hat einen Eingang an dem die Kunden eintreffen. Diese Personen wählen während des Einkaufs einen Weg durch den Markt bis zu den Kassen. An Abzweigungen oder Kreuzungen an Regalen befinden sich Messstationen, welche die im jeweiligen Abschnitt in den Wagen gepackte Waren registrieren. Auf diese Weise sind Schlussfolgerungen über die beliebtesten Wege zu treffen, eine Reihe von Produkten einzukaufen. Zusätzlich wird auch die Zeitdauer für den Einkauf auf bestimmten Wegabschnitten in der Beobachtung betrachtet. Anhand der Analyseergebnisse eines solchen Signalmodells, können die Marktleiter entscheiden, wo sie interessante Angebote aufstellen oder Einkaufswege für Rentner erleichtern können (mit Verschlüsselung des Alters der Kunden bei der Messung). Dadurch, dass eine unendliche Anzahl von Kunden den Markt besuchen können, entsteht ein **theoretisch unendlich großer Zustandsraum** des Modells. Die Analyse dieser Klasse von Signalmodellen mit Hilfe der Proxelmethode, wird in einem folgenden Abschnitt dieses Kapitels näher erläutert. Es wird beschrieben, wie ein Modell mit der Entwicklung einer theoretisch unendlichen Anzahl von Proxeln auf eine endliche diskrete Signalfolge analysiert werden kann.

#### 4.3.4 Experiment 3

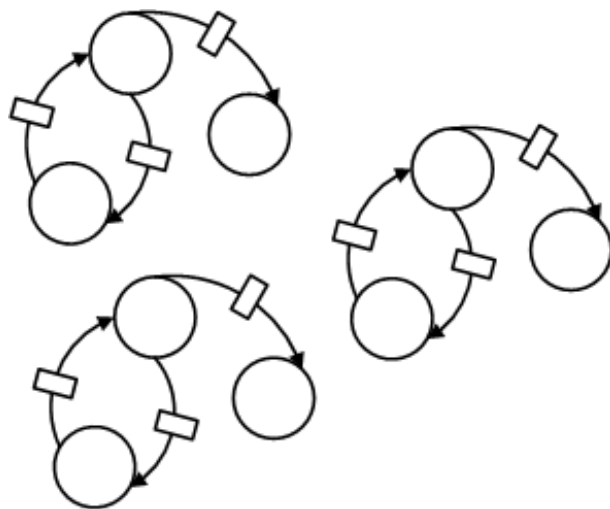


Abbildung 4.7: Modell mit mehreren nebenläufigen Teilprozessen

Am interessantesten und unvorhersehbarsten gestaltete sich die dritte Art von Modellen. Hier war das Verhalten der Modelle in Bezug auf die oben genannten und zu beantwortenden Fragestellungen schwer einzuschätzen. Es wurden drei voneinander unabhängige Netze, zusammengestellt. Damit sollten drei nebenläufige Prozesse abgebildet werden. Jedes einzelne Netz konnte in einen Zustand wechseln, der einen Ausfall der

Komponente darstellen sollte. Dadurch wird erwartet, dass die Entwicklungen des Modells mit wachsender Simulationsschrittweite eingedämmt werden.

Bei diesem Modell entstehen je nach Komplexität jedes einzelnen Teilnetzes und Anzahl der gleichzeitig arbeitenden Teilnetze sehr viele Entwicklungsmöglichkeiten. Für dieses Beispiel entstehen durchschnittlich etwas weniger Möglichkeiten, wie für die Modellvariante aus Experiment 1. Das wird durch die gleichzeitige Aktivierung verschiedener Transitionen der Teilnetze verursacht. Werden bestimmte Symbole nur durch die Transitionen eines Netzes ausgegeben, so charakterisieren die Symbole die verschiedenen Teilnetze. Ähnlich den Teilaktivitäten aus Experiment 2, können Signalfolgen der einzelnen Netze in einer Sequenz kombiniert analysiert werden.

Als Beispiel produzieren drei Maschinen drei unterschiedliche elektronische Bauteile. Die Fertigstellung jedes Bauteils wird durch die Ausgabe eines bestimmten Symbols signalisiert. Die drei Bauteile werden miteinander verbunden und stellen das Endprodukt dar. Mit einer Sequenz von gemischten Signalfolgen der Teilnetze kann beispielsweise ermittelt werden, wie wahrscheinlich 13 Endprodukte in den nächsten 24 Stunden im Abstand von ca. 2 Stunden gefertigt werden können. Weiterhin können die wahrscheinlichsten Produktionsabläufe der Maschinen ermittelt werden.

Ein anderes Beispiel parametrisierte die Netze mit gleichen Symbolausgaben. Damit ist es möglich Quantitätsanalysen zu fahren und die Frage zu beantworten, wie viel Ereignisse -X- (Bauteil A fertig), in welcher Zeit, mit welcher Wahrscheinlichkeit eintreten. Es wird nicht mehr nur untersucht, wie oft ein Ereignis eintritt, sondern wie wahrscheinlich ein Ereignis in bestimmten Zeitabständen eintritt.

Abbildung 4.8 zeigt, wie die Entwicklungsmöglichkeiten des Modells durch die Symbolausgaben begrenzt werden. Wie in den oben beschriebenen Experimenten werden bei der Ausgabe vieler Symbole pro Transition (5 bis ...), viele sequenzerzeugende Pfade erzeugt. Diese liefern in weniger Zeitschritten TSW die nicht weiter betrachtet werden. Dieses Modell zeigt das zu erwartende Verhalten, dass die Ausgabemöglichkeit von mehr Symbolen auch mehr valide Pfade hervorbringt. Das beschriebene Verhalten für die Parametrisierung auf Experiment 1 und 2 kann hier nicht bestätigt werden. Die Entwicklungspfade wurden durch die möglichen Symbolausgaben eingeschränkt. Werden die TSW betrachtet, so entwickeln sich diese auf ähnliche Weise zu Experiment 1, nur nach ca. 10 Zeitschritten mehr. Das begründet sich daraus, dass die Anzahl der möglichen Entwicklungen hier (pro Proxel ca. 4 Folge-Proxel) etwas geringer als in der Variante aus Experiment 1 ist.

In diesem Experiment musste die Analyse jeweils abgebrochen werden, da der Speicherbedarf für die Modellvariante die Grenze des Testrechners <sup>1</sup> erreichte, aufgrund der zu hohen Anzahl von Proxeln einer Ebene. Es wird jedoch erwartet, dass sich die Anzahl der zu bearbeitenden Proxel pro Zeitschritt ähnlich wie in Experiment 1, durch die steigende Anzahl zu geringer TSW, eingrenzt und der Algorithmus terminiert.

---

<sup>1</sup>1 GHz Celeron 512MB Arbeitsspeicher unter Microsoft Windows 2000

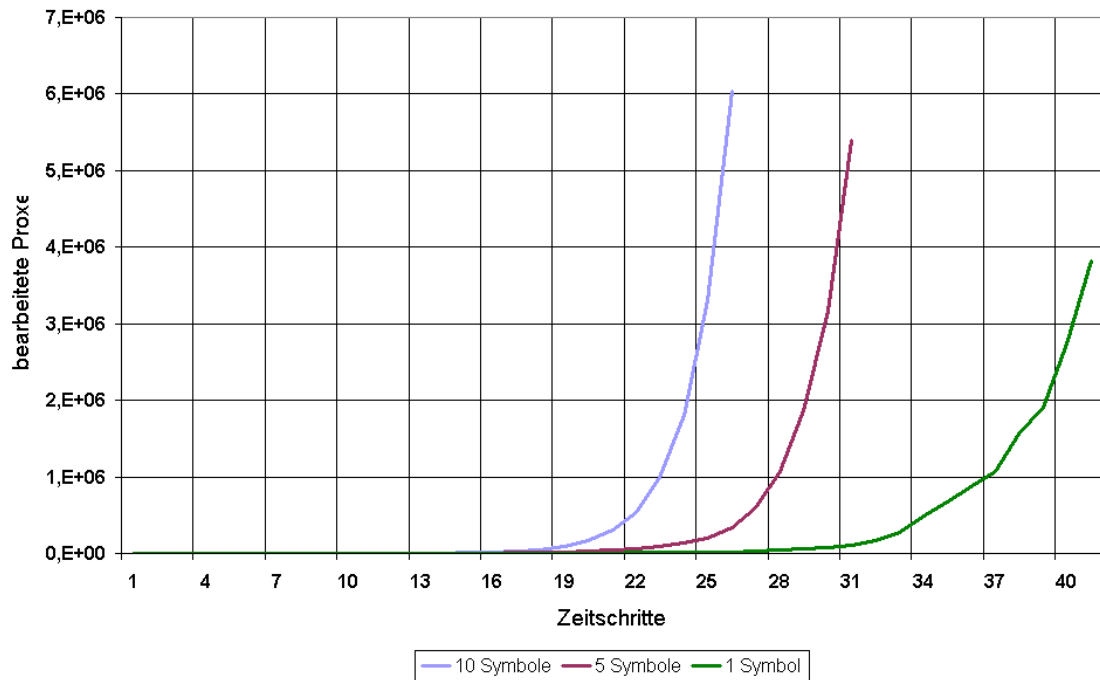


Abbildung 4.8: bearbeitete Proxe pro Zeitschritt für Experiment 3 (Variation der Anzahl der Symbole die pro Transition erzeugt werden können)

Die Experimente haben gezeigt, dass sich unabhängig voneinander nebenläufige Signalprozesse gut durch die Proxelmethode untersuchen lassen. Der Rechenaufwand hängt auch hier wieder von der Anzahl der Entwicklungsmöglichkeiten ab. Daher ist es von Vorteil, wenn es wenige mögliche Pfade erlauben die Folge zu erzeugen (eindeutige Zuordnung der Symbole zu Transitionen). Auch hier zeigten die Untersuchungen Sequenzlängen bis zu 50 bis 100 Symbolen (mit Sequenzwahrscheinlichkeiten ab  $10^{-70}$ ), die mit vergleichbarem zeitlichen Aufwand zur zweiten Modellvariante analysiert wurden. Größere Folgenlängen lieferten keine aussagefähigen Wahrscheinlichkeitswerte mehr.

### 4.3.5 Experiment 4

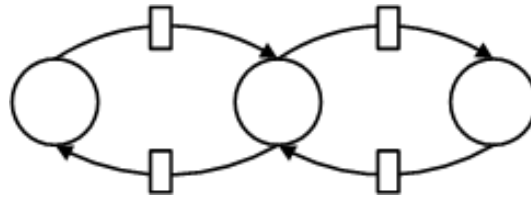


Abbildung 4.9: Modell mit wenigen Entwicklungsmöglichkeiten

Das vierte Modell dieser Untersuchungen stellt das bereits vorhandene Modell der verwendeten Basisimplementierung dar. Dieses kleine Modell eignet sich gut die eingeschränkten Entwicklungsmöglichkeiten und deren Verhalten mit den komplexeren Modellen vergleichen zu können. Weiterhin wurde das überschaubare Modell zur Verifikation der korrekten Funktion des geänderten Proxelalgorithmus verwendet. Durch die weniger gefächerten Entwicklungsmöglichkeiten des Modells (pro Proxel ca. 1,333 Folge-Proxel) ist eine schnelle Analyse zu erwarten. Allerdings konnte durch die Experimente gezeigt werden, dass ein Modell mit wenigen Zustandsänderungen eine Signalfolge nicht grundsätzlich schneller analysiert, als Modelle mit vielen Änderungsmöglichkeiten.

Mit der Parametrisierung der gleichen Verteilungsfunktionen und Symbolwahrscheinlichkeiten wie in Experiment 1, werden durch die geringeren Entwicklungsmöglichkeiten des Modell weniger Pfade erzeugt. Dennoch werden ähnlich viele Zeitschritte der Sequenz analysiert, bevor die Analyse aufgrund der geringen TSW der Pfade beendet wird (siehe Abbildung 4.10). In diesem Fall erfolgt die Analyse schneller als im Experiment 1. Existieren jedoch für das Modell aus Experiment 1 ähnlich viele Entwicklungsmöglichkeiten pro Zeitschritt wie für das Modell aus Experiment 4, resultiert ein nahezu gleiches Analyseverhalten für beide Modellvarianten wie Abbildung 4.10. Das bedeutet, dass die Anzahl der möglichen Zustandsübergänge in diesem Beispiel einen Einfluss auf die maximal möglichen sequenzerzeugenden Pfade hatte. Folglich wurden für die Modellvariante aus Experiment 1 mehr Proxel erzeugt.



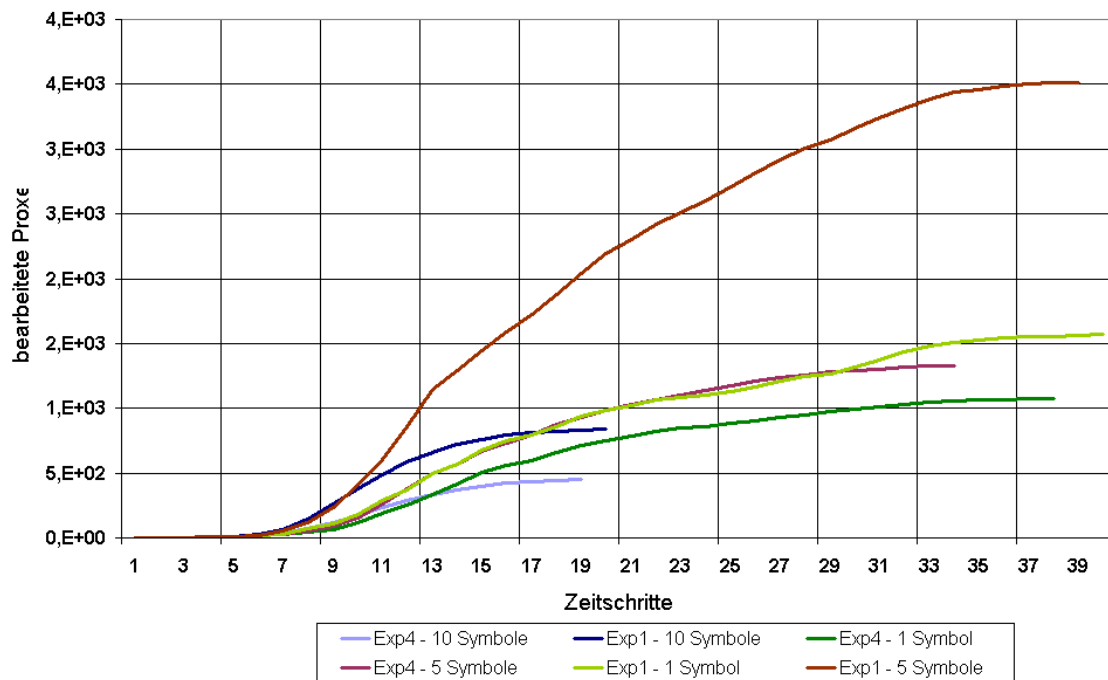


Abbildung 4.10: bearbeitete Proxel pro Zeitschritt für Experiment 4 und 1 (mit 2 erreichbaren Folgezuständen) (Variation der Anzahl der Symbole die pro Transition erzeugt werden können)

Die Wahrscheinlichkeit durch eine Transition einen Zustand zu erreichen in dem ein Symbol erzeugt wird, kann als nötige Ressource betrachtet werden. Ist die Wahrscheinlichkeit sehr gering, ist es durch den Zustandsübergang kaum möglich das entsprechende Symbol in einer Signalfolge auszugeben. Durch die Wahl von verschiedenen Verteilungsfunktionen und dem konkurrierenden Verhalten zweier Transitionen kann ein Symbol der Signalfolge nur sehr unwahrscheinlich erzeugt werden. Kann ein Symbol nur durch sehr kleine Wahrscheinlichkeiten (ab  $10^{-5}$ ) für den Zustandsübergang erzeugt werden, spricht man von einem seltenen Ereignis. Diese Wahrscheinlichkeiten resultieren durch die definierte Verteilungsfunktion der Transition.

Daraus ergeben sich sehr wenige valide Pfade, da unwahrscheinliche Pfade nicht weiter verfolgt werden. Durch den starken Einfluss dieser geringen Wahrscheinlichkeiten auf die TSW eines Proxel, wird die Sequenz nach der Ausgabe eines seltenen Signals nur noch wenige Zeitschritte analysiert (in den Experimenten 0 - 5 Zeitschritte). Wie viele Zeitschritte das sind, hängt von der TSW vor dem seltenen Signal ab, wie wahrscheinlich die weiteren Entwicklungen sind und wie (un)wahrscheinlich das Signal war.

Trotz der geringen TSW ist es wichtig auch unwahrscheinliche Signalfolgen analysieren zu können. Ein Beispiel ist die Analyse eines katastrophalen Szenarios einer sicherheitskritischen Anwendung (Bremsanlage des Auto). Die Signale repräsentieren in diesen Fäl-

len den Defekt wichtiger Teilkomponenten eines Gesamtsystems. Die Signalfolge definiert den Ausfall der Teilsysteme in bestimmten Zeitabständen zueinander. Dadurch ist auszuwerten wie wahrscheinlich ein gefährliches Szenario ist und welchen Entwicklungsweg das Modell am wahrscheinlichsten dafür einschlägt.

Diese Modellvariante kann auch als Teilnetz eines größeren Modells verwendet werden.

### 4.3.6 Experiment 5

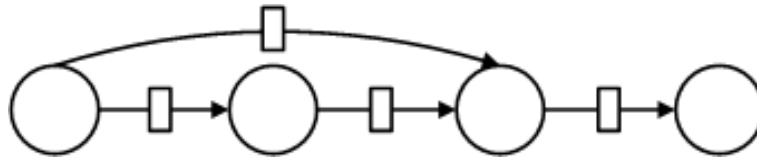


Abbildung 4.11: in der Spracherkennung genutztes left-right-Modell

Die letzte Modellvariante der Untersuchungen stellt die typische left-right-Topologie der in der Sprach- und Mustererkennung angewandten HMM dar. Dieser Modelltyp hat sich für diesen Anwendungsbereich der HMM etabliert. Aus diesem Grund wurde die Analyse der left-right-Signalmodelle durch den Proxelalgorithmus untersucht. Wie in Abschnitt 4.1 beschrieben, eignet sich die Modellvariante aber auch für andere Signalprozessabbildungen, wie beispielsweise Projektpläne.

Die Zustandsübergänge definieren größere Wahrscheinlichkeiten den topologisch rechten Zustandsnachbar zu erreichen. Deshalb wurden für die Experimente Verteilungsfunktionen definiert, die unterschiedlich große Wahrscheinlichkeitswerte liefern. Die einen liefern sehr hohe Wahrscheinlichkeiten, den rechten Nachbarzustand zu erreichen. Die anderen bestimmen sehr kleine Wahrscheinlichkeiten, die linken Nachbarzustände zu erreichen. Erzeugen nur Transitions mit kleinen Wahrscheinlichkeiten bestimmte Symbole der Signalfolge, resultiert eine geringe Wahrscheinlichkeit für diese Folge.

Diese geringen Wahrscheinlichkeitswerte repräsentieren beispielsweise sehr seltene Ereignisse, wie in Experiment 4 bereits erwähnt. Es existieren auch Signalmodelle, für die die zu analysierende Signalfolge möglichst unwahrscheinlich ausfallen soll. Die Möglichkeit diese so genannten „rare events“ sicher zu untersuchen unterstützen die Proxel, da alle möglichen Entwicklungen des System betrachten werden. Diese Modellarten sind oft für sicherheitskritische Anwendungen (Atomreaktor, Bremsanlage eines Autos) sehr wichtig, um den Ausfall besonders notwendiger Komponenten beurteilen zu können. Es ist mit den Signalmodellen möglich nicht nur die Wahrscheinlichkeit für die Möglichkeit eines Ausfalls mehrerer Komponenten zu bestimmen, sondern auch die Zeitspannen dazwischen in die Betrachtung mit einzubeziehen. Aufgrund dieser Eigenschaften ist die Verwendung dieser Untersuchungsmöglichkeit von Signalmodellen zu empfehlen.

In dieser Modellvariante ist also eine Hauptentwicklungsrichtung modelliert. Abbildung 4.12 zeigt das Analyseverhalten bei Änderung der Anzahl zu erzeugender Symbole pro Transition. Es zeigt sich wieder ein ähnliches Bild der zu erzeugenden Proxel und der

analysierten Sequenzlängen wie aus den Experimenten 1 und 2. Aufgrund der Symbol- und der Übergangswahrscheinlichkeiten wurden für viele Symbole in wenigen Zeitschritten Proxel mit schnell an Null konvergierenden TSW erzeugt. Bis zum Zeitschritt 10 wachsen alle Parametervarianten gleich schnell an. Für das Erzeugen nur eines Symbols konnte hier die längste Analyse der vorgegebenen Sequenz durchgeführt werden. Durch die wenigen Entwicklungsmöglichkeiten verteilt sich die Gesamtwahrscheinlichkeit nicht sehr stark auf die entstehenden Proxelzweige. Die Parametrisierungen der Transitionen liefern hohe Wahrscheinlichkeiten für das Verweilen in einem Zustand des System. Da mit der Ausgabe eines Symbols die Wahrscheinlichkeit für ein NULL-Symbol im Gegensatz zu den anderen Varianten groß ist, entstanden viele Pfade deren TSW erst nach 40 bis 50 Zeitschritten unter eine Wahrscheinlichkeitsschwelle von  $10^{-30}$  fiel. Es wurden Sequenzwahrscheinlichkeiten von  $10^{-20}$  erzeugt und in wenigen Sekunden analysiert.

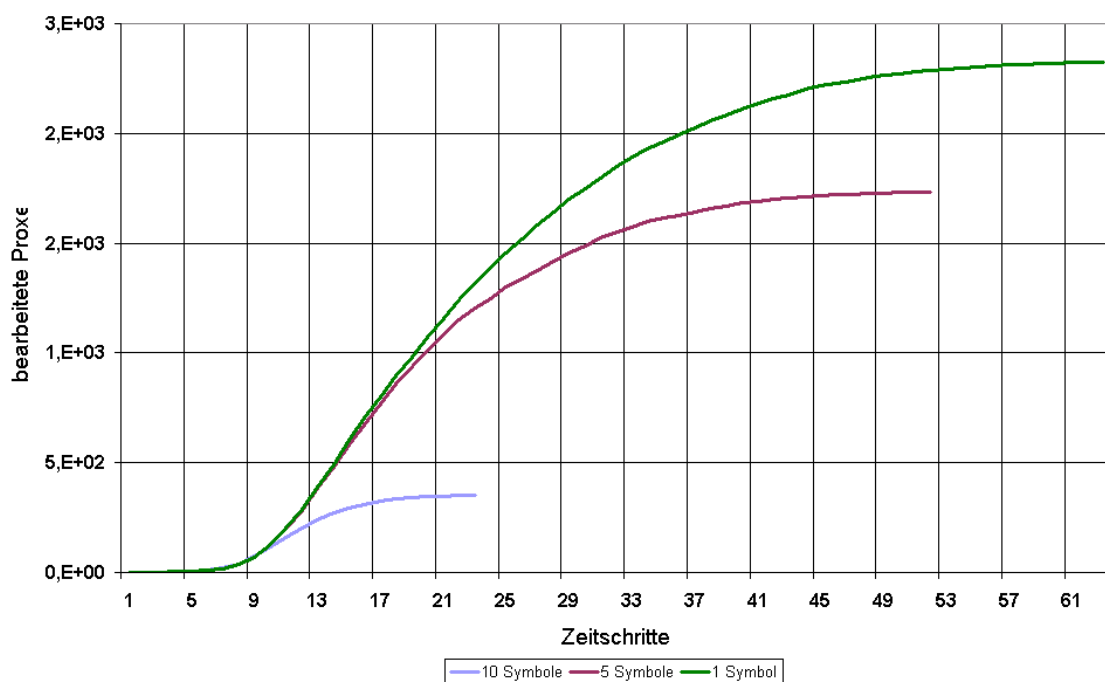


Abbildung 4.12: bearbeitete Proxel pro Zeitschritt für Experiment 5 (Variation der Anzahl der Symbole die pro Transition erzeugt werden können)

## 4.4 Schlussfolgerungen der Experimente

Aus den durchgeführten Experimenten können folgende Schlussfolgerungen gezogen werden. Modelle mit einer hohen Komplexität von Entwicklungsmöglichkeiten verursachen

sehr große Zustandsräume. Es resultierte daraus ein Rechenaufwand von mehreren Minuten, aufgrund des hohen Speicherbedarfs und der Auslagerung der Daten auf die Festplatte des Testrechners<sup>2</sup>. Modelle in denen nahezu alle Symbole durch jede Transition gleichwahrscheinlich erzeugt werden können, tragen zu keiner wesentlichen Einschränkung der Entwicklungswege bei. Es entstehen folglich viele valide Pfade, die die Sequenz erzeugen können. Allerdings wurden wegen der schnell kleiner werdenden TSW, nur bis zu 25 Zeitschritte der Testsequenzen analysiert.

Für Modelle bei denen wenige sequenzerzeugende Pfade entstehen, können die Entwicklungsmöglichkeiten des Modells stark reduziert werden. Das wirkt sich förderlich auf den benötigten Speicherbedarf des Algorithmus und die auszuwertende Menge von Proxelpfaden aus. Es reduziert sich folglich der Zeitbedarf der Analyse. Hier konnten auch längere Sequenzen analysiert werden (30 - 50).

Aufgrund der Zustandsraumexplosion können Modellvarianten mit sehr vielen Entwicklungsmöglichkeiten, mit Hilfe des originalen Proxelalgorithmus, sehr schlecht analysiert werden. Liegen diese Modellvarianten als Signalmodelle vor, so wird das Wachstum der Entwicklungsmöglichkeiten durch die Analyse einer bestimmten Signalfolge eingeschränkt. Dadurch lassen sich diese Art Modelle als Signalmodelle schneller auswerten. Je nach Anzahl der noch verbleibenden validen Entwicklungspfade können das wenige Sekunden/Minuten sein.

Durch die Verwendung von steifen allgemeinen Verteilungsfunktionen, entstehen für Signalmodelle sehr wenige sequenzerzeugender Entwicklungspfade. Aus andere Funktionen resultieren in Randbereichen der Dichtefunktion sehr kleine Wahrscheinlichkeiten. Dies führt in wenigen Zeitschritten zu sehr kleinen TSW. In beiden Fällen tragen diese Proxelzweige zu keiner relevanten Veränderung des Analyseergebnisses bei und werden nicht weiter in die Berechnungen mit einbezogen. Damit konzentriert sich der Proxelalgorithmus im Gegensatz zu den Verfahren der HMM auf ausschlaggebende Entwicklungen im Modell. Dadurch konnten die Modellvarianten mit diesen Parametrisierungen in wenigen Sekunden oder Minuten analysiert werden (Sequenzwahrscheinlichkeiten von  $10^{-20}$  -  $10^{-40}$ ).

Die Aussage, dass Modelle mit wenigen möglichen Zustandsänderungen schneller analysiert werden, als Modelle mit vielen Änderungsmöglichkeiten kann nicht bestätigt werden. Für Modelle mit wenigen Entwicklungsmöglichkeiten ist im Allgemeinen eine geringere Analysedauer zu erwarten, als im gegenteiligen Fall. Dennoch können Entwicklungsmöglichkeiten, die sich aus den Transitionen des Modells ergeben, durch die Symbolparameter und die zu untersuchende Symbolfolge wiederum stark eingrenzt werden. Dadurch kann diese Aussage nicht pauschalisiert werden, sondern ist von den Parametern der Modelle abhängig. Werden mehrere Zustandsänderungen in einem Zyklus mit den gleichen Parametern definiert wie für wenige (siehe Experiment 4 und 1), so entsteht für beide Varianten das gleich Analyseverhalten.

Allgemeine Verteilungsfunktionen liefern teilweise gegenüber festen Wahrscheinlichkeiten sehr kleine Werte für einen Zustandsübergang (siehe Abbildung 4.6). Daraus resultieren kleine TSW. Für die Symbolwahrscheinlichkeiten gilt das gleiche Prinzip. Sind die

---

<sup>2</sup>1 GHz Celeron 512MB Arbeitsspeicher unter Microsoft Windows 2000

Wahrscheinlichkeiten zu klein (0.01 - 0.0 . . .) resultieren kaum relevante TSW der Proxel. Wie die Experimente 1 und 2 gezeigt haben, können Modelle in denen die Übergangs- und Symbolwahrscheinlichkeiten größere Werte liefern, auf längere Sequenzlängen untersucht werden. Hier liefern Folgen mit ca. 50 Zeitschritten brauchbare Ergebnisse (Sequenzwahrscheinlichkeiten von  $10^{-8}$  -  $10^{-30}$ ).

## 4.5 Ideen für erweiterte Analysen an Signalmodellen

Eine Klasse von Modellen die mit HMM nicht modellieren werden können sind Modelle, die unendlich viele Entwicklungsmöglichkeiten des Systems erzeugen. Es ist jedoch möglich diese Modelle mit dem Proxelverfahren zu analysieren. Ein einfaches Beispiel einer Warteschlange zeigt Bild 4.13. Dieses Modell entwickelt unendlich viele Zustände, da immer mehr Personen in die Warteschlange eintreten können. Die vollständige Berechnung ist mit dem Proxelverfahren auch nicht möglich, jedoch lassen sich die Entwicklungen gegenüber den HMM in einem gewissen Masse kontrollieren.

Zum einen können alle Entwicklungen bis zu einer bestimmten verstrichenen Zeit betrachtet werden. Dadurch wird der theoretisch unendliche Entwicklungsbaum der Proxel bis zu einer erreichten Simulationszeit verfolgt. Eine andere Möglichkeit ist die Kontrolle der Entwicklungen durch eine untere Wahrscheinlichkeitsschranke. Dadurch werden Proxel mit einer sehr geringen Wahrscheinlichkeit nicht weiter analysiert.

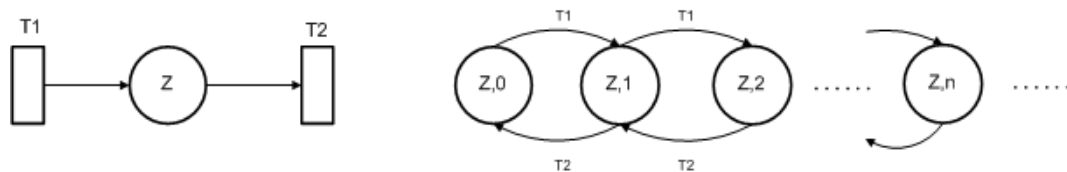


Abbildung 4.13: SPN mit unendlichem Zustandsraum (Z, Anzahl der Marken in Z)

Diese Art von Signalmodellen auswerten zu können, war bisher nicht möglich. Mittels dieser Möglichkeit erschließt sich eine große Klasse von Systemen. In der Praxis gibt es Verhalten (z.B. Ankunfts- und Abgangs-Verhalten) die einer bestimmten Verteilung unterliegen. Dieses Verhalten kann durch ein Petri Netz sehr einfach modelliert werden. Aufgrund der immer kleiner werdender Wahrscheinlichkeiten können Entwicklungspfade abgeschnitten werden. Dennoch kann es zu einer Explosion des Zustandsraumes kommen. Somit können diese Systeme nicht auf lange Sequenzfolgen untersucht werden. Was ist jedoch eine lange Folge?

Eine Sequenz hat durch die Diskretisierung eine bestimmte Anzahl von Zeitschritten. Im Proxelbaum repräsentiert jedes Level  $l$  einen diskreten Zeitschritt. Daraus folgt, dass die Analyse der Beobachtungsfolge bis zur Tiefe  $l$  erfolgen muss. Auf diesem Weg können viele Entwicklungspfade entstehen, wie die Experimente zeigen. Eine Möglichkeit der Begrenzung der Zustandsraumexplosion bei Signalmodellen besteht in der Definition

eines Schwellenwertes für die Wahrscheinlichkeit der Sequenz. Ist eine definierte untere Schranke erreicht, können die bis dahin ermittelten Ergebnisse ausgegeben werden. Diese Schranke kann im Algorithmus auch schon früher greifen und Entwicklungspfade von der weiteren Betrachtung ausschliessen. Das bedeutet die Sequenz ist zwar über diese Pfade möglich, jedoch so unwahrscheinlich, dass der Pfad oder der Anteil an dem Gesamtergebnis nicht mehr relevant erscheint. Dadurch kann der Baum an diesen Stellen beschnitten werden und es wird der weitere Untersuchungsaufwand eingespart.

#### 4.5.1 Analyse von Kurzfolgen

Im Verlauf der Experimente wurden Varianten der Parameter verwendet, bei denen alle möglichen Entwicklungen in kurzer Simulationszeit sehr kleine Wahrscheinlichkeiten für die Sequenz lieferten. Dies hing hauptsächlich an der Parametrisierung der Symbolwahrscheinlichkeiten und den vorgegebenen langen Sequenzen. Eine Idee die daraus entstand zielt auf die Untersuchung von „Kurzsequenzen“ ab. Damit kann beispielsweise untersucht werden, welche wiederholenden Muster ein Modell entwickelt. Anders herum könnte ein Prozess daraufhin analysiert oder optimiert werden, möglichst oft bestimmte Outputs zu generieren.

Diese Möglichkeit wurde für die Experimente im Testprogramm implementiert. Dabei sind beliebig viele und auch unterschiedlich lange Beobachtungsfolgen analysierbar. Die vergangenen Ereignisse werden in die Betrachtung des Auftretens einer Kurzfolge mit einbezogen. Dadurch ist es wichtig, unter welchen Umständen bzw. durch welche Entwicklung des Modells die Möglichkeit die Kurzfolge auszugeben entstanden ist. Wird die mögliche Ausgabe des ersten Symbols einer Kurzsequenz ermittelt, beginnt die Betrachtung. Kann die Folge bis zum Ende erzeugt werden, wird die Teilsequenzwahrscheinlichkeit für diesen Pfad als Ergebnis ausgegeben. Es würde sonst der zeitliche Aspekt der Analyse und der Ausgabe ausgeschlossen.

Ein repräsentatives Beispiel ist die dritte Art von Modell aus den Experimenten. Es gibt drei voneinander unabhängig arbeitende Maschinen. Diese stellen unterschiedliche Komponenten für ein größeres System her, welches aus den Einzelbausteinen gefertigt wird. Als Anwendungsbeispiele wären herstellende Unternehmen, wie Automobilkonzerne oder Elektronikunternehmen zu nennen. Das Interesse besteht darin die Wahrscheinlichkeit für das Erzeugen dieser Einzelkomponenten in einer bestimmten zeitlichen Reihenfolge zu untersuchen. Das Bild 4.14 beschreibt drei unterschiedlich lange Kurzfolgen. Die grünen Teilzweige beschreiben jeweils zwei aufeinander folgende Symbole X und Y. Die Einfärbungen zeigen alle möglichen Entwicklungspfade in den diese Folge XY auftreten kann. Die roten (zwei Symbole) und blauen (vier Symbole) Einfärbungen beschreiben die beiden anderen Kurzfolgen und ihr Auftreten im Proxelbaum.

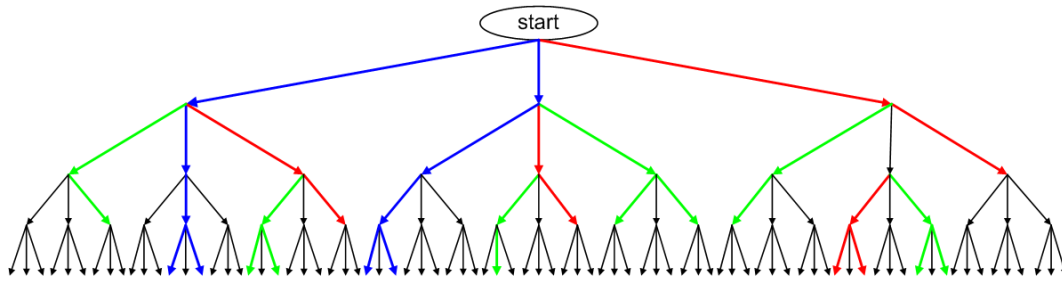


Abbildung 4.14: Ausgabemöglichkeiten von 3 unterschiedlichen Kurzfolgen in einem Prozelbaum

Bei dieser Analyse werden alle Proxel weiter verfolgt, deren Wahrscheinlichkeit nicht unter eine Wahrscheinlichkeitsschwelle fallen. Für Modelle, die sehr viele Entwicklungspfade ermöglichen bietet sich die Analyse von Kurzsequenzen demzufolge nicht an.

Ein System kann eine so genannte Einschwingphase aufweisen. Das bedeutet, dass der Fluss der Wahrscheinlichkeit von Zuständen in ihre Folgezustände stark variieren kann. Ein Modell eines realen Prozessablaufs kann so abgebildet sein, dass es durch die initialen Parameter zu Beginn der Simulation nicht das typische Verhalten aufweist. Erst nach einer bestimmten verstrichenen Entwicklungszeit gilt es als eingeschwungen und arbeitet in einem stabilen Ablauf. Diesen Zustand bezeichnet man als „steady state“.

Er wird definiert als minimale Änderung des Flusses von Wahrscheinlichkeit zwischen den Zuständen des Systems. Für den Proxelalgorithmus lässt sich diese Beobachtung ermitteln, indem der Wahrscheinlichkeitsfluss zwischen den Zuständen in Zeitschritt  $X$  und dem folgenden Zeitschritt  $Y$  verglichen wird. Es wird also verglichen wie viel Wahrscheinlichkeitsmasse in einem Zeitschritt noch zwischen den Zuständen des Modell fließt. Fällt die Differenz der Wahrscheinlichkeitsmassen in den einzelnen Zuständen unter eine bestimmte Grenze  $\psi$ , so ist der „steady state“ erreicht. Das ist eine einfache Berechnung zur Erfüllung der definierten Bedingung dieses Zustandes in der Simulation. Dennoch ist es leicht möglich ein lokales Minimum erreicht oder den Wert  $\psi$  nicht hinreichend klein gewählt zu haben. Dadurch muss das Kriterium, für das der „steady state“ als erreicht gilt, sorgfältig gewählt werden.

Sollte der Zeitpunkt festgelegt oder sogar durch andere Umstände vorgegeben sein, kann die Sequenzanalyse mit dieser ermittelten Entwicklung gestartet werden. Die Analyse des Modells bringt nun möglicherweise realistischere oder genauere Daten hervor, was eine bessere Analyse der Signalfolge zulässt. Kleinere Verbesserungen der Genauigkeit der Analyseergebnisse spielen für sicherheitskritische Anwendungen eine große Rolle. Für diese Anwendungen treten meist schon sehr kleine Wahrscheinlichkeiten auf, womit sich die kleinen Änderungen schon stark auswirken können.

## 4.5.2 Adaption der dritten Fragestellung der HMM

Eine Analyse von Signalmodellen, die mit Hilfe der HMM durchgeführt werden kann, ist die Anpassung oder das Training eines Modells und seiner Parameter. Damit soll erreicht werden, dass ein Modell eine vorgegebene Sequenz möglichst wahrscheinlich erzeugt. Mit den in Abschnitt 2.3.2 beschriebenen Methoden ist dies zu einem gewissen sicheren Grad machbar. Da jedoch die Algorithmen auf Gradientenverfahren beruhen, ist es nur möglich lokale Maxima zu ermitteln.

Das Proxelverfahren kann die nötigen Variablen für dieses Verfahren ermitteln. Damit könnte die dritte Fragestellung auch mit Hilfe des Proxelverfahrens analysiert werden. Dabei besteht aber folgendes Problem. Die Schätzungen der Parameter für die Übergangs- und Symbolwahrscheinlichkeiten liefern konstante Werte. Diese wären im weitesten Sinne als mittlere Werte für die definierten Verteilungen zu verstehen und könnten nur für exponentiell-verteilte Zustandsübergänge verwendet werden. Ein SPN mit ausschließlich exponentiell-verteilten Transitionen liefert keinen Mehrwert gegenüber einem HMM. Es ist damit keine Schätzung der Parameter der allgemeinen Verteilungsfunktionen möglich. Das ergibt somit keinerlei Vorteile für die Evaluierung dieses Problems mit Hilfe der Proxelmethode.

Ein anderer Vorschlag nutzt einen Aspekt der Optimierung. Es wird angenommen, dass bereits ein Petri Netz Modell von dem System modelliert wurde. Mit der definierten zu untersuchende Sequenz, wird eine Analyse der Wahrscheinlichkeit dieser Folge mit der angepassten Proxelmethode durchgeführt. Durch Manipulationen der Parametern des zugrunde liegenden Modells, können nacheinander neue Analyseläufe gefahren werden. Mit den Ergebnissen der einzelnen Läufe können Vergleiche zwischen den Wahrscheinlichkeiten der Beobachtungsfolge durchgeführt werden. Dabei stellen sich folgende Fragen. Wie hoch darf der Aufwand sein? Welche Stellen müssen manipuliert werden, um positive Ergebnisse zu erhalten und wie groß sollten die Änderungen sein?

Zwischen einzelnen Zeitschritten oder auch etwas größeren Zeitspannen wäre ein Vergleich der resultierenden Teilsequenzwahrscheinlichkeiten der Entwicklungen für die Signalfolge sinnvoll. Differenzen dieser Werte können Hinweise auf Komponenten mit hohem Einfluss auf das Ergebnis ergeben oder interessante Entwicklungen zu diesem Zeitpunkt offen legen. Demnach kann der Nutzer Einschätzungen darüber treffen, welche Änderungen sich als vorteilhaft herausstellen könnten.

Für diesen Vorschlag ist jedoch viel Expertenwissen nötig. Durch viele offenen Fragen und das Fehlen eines konkreten analytischen Ansatzes, kann der Erfolg einer schrittweisen verbesserten Anpassung der Parameter nicht garantiert werden. Dennoch kann die wiederholte Analyse eines Modells und einer Signalfolge unter folgenden Bedingungen verwendet werden. Für den Fall, es liegt bereits ein hypothetisches oder reales Modell vor, können durch Veränderung der Parameter Verbesserungen an ein Kriterium verwirklicht werden. Ist dieses System beispielsweise schon in der Praxis eingebettet, bestehen für die Modellparameter bestimmte Spielräume an Einstellungsmöglichkeiten. Diese Parameter können einzeln meist zu einen gewissen Grad geändert werden. Dadurch besteht die Möglichkeit, das Petri Netz Modell durch wiederholte Analysen mit dem neuen Verfahren an eine Signalfolge oder den wahrscheinlichsten sequenzerzeugenden Pfad anzupassen.



## 5 Reflexionen über die Arbeit

In diesem abschließenden Kapitel werden die Ergebnisse der entstandenen Arbeit bewertet. Es wird beschrieben, inwieweit die anfänglich gesetzten Ziele erreicht wurden. Weiterhin wird zusammengefasst, welche Möglichkeiten durch die Erweiterung des Proxelverfahrens zur Analyse von Signalmodellen entstanden sind. Ein weiterer Abschnitt setzt sich mit einigen offen gebliebenen Fragen der Arbeit auseinander. Das Kapitel schließt mit verschiedenen Ideen und Vorschlägen, die Potential zur weiteren Erforschung bieten.

Zwei Modelle wurden sowohl mit den ersten beiden Analyseverfahren der HMM, als auch mit der Analyse durch das Proxelverfahren untersucht. Die Ergebnisse beider Analysen stimmten überein. Diese Tatsache deutet darauf hin, dass die Anpassung des Proxelverfahrens auf die ersten beiden Fragesellungen der HMM und die damit verbundene Implementierungen korrekt sind.

### 5.1 Bewertung der Ziele

Als Fazit für die im ersten Kapitel festgelegten Ziele der Arbeit kann folgendes festgehalten werden. Mit den Ergebnissen der vorliegenden Arbeit ist die Modellierung von Signalmodellen mit Hilfe von SPN möglich. Petri Netze können durch die deterministische Proxelmethode auf die ersten beiden Fragestellungen der HMM hin analysiert werden. Stochastische Petri Netze ermöglichen mit der Verwendung von allgemeinen Verteilungsfunktionen eine höhere Mächtigkeit der Modellierung von Signalmodellen. Der neue Ansatz bietet eine Alternative zu den Abbildungseinschränkungen der Hidden Markov Modelle. Hierbei entstand ein neuartiges Simulationswerkzeug für Signalmodelle. Durch die als intuitiv geltenden Modellierungseigenschaften der Petri Netze, sollte dieses Verfahren nicht nur durch Experten für Markov Modelle Verwendung finden können. Weiterhin wurde ein breites Anwendungsspektrum durch die Untersuchungen gezeigt. Die Proxelmethode als Kern, unterstützt eine große Anzahl zu analysierender Modellvarianten und bietet gegenüber der Analyseverfahren der HMM einige Vorteile.

Es wurde weiterhin eine Evaluierung von verschiedenen Modellarten durchgeführt, welche die Besonderheiten des neuen Verfahrens untersucht haben. Die verwendeten Modellvarianten wurden aufgrund des erwarteten Verhaltens durch den Proxelalgorithmus und durch die assoziierten praxisbezogenen Anwendungsbeispiele ausgewählt. Dennoch ist zu erwähnen, dass diese Vorschläge keinesfalls als eine Fixierung auf ausschließlich diese Beispiele angesehen werden sollen. Ähnliche Modellvarianten und Parameter sollten ein analoges Verhalten wie die entsprechenden Beispielmodelle aufweisen.

Aufgrund der großen Spanne der Anwendungsgebiete für Signalmodelle (wie in Kapitel 4 beschrieben), existieren möglicherweise spezifische Fälle, die hier nicht evaluiert wur-

den und für die sich das Verfahren nicht eignet. Mit den durchgeführten Experimenten wurden sowohl neu entstandene (Signalausgaben der Transitionen) als auch bekannte Einflüsse (Zustandsraumexplosion) untersucht, um die Eigenschaften des entstandenen Verfahrens und die Erwartungen an den Algorithmus zu analysieren. Es entstanden Empfehlungen für die Verwendung der Proxel-basierten Analyse von Signalmodellen. Unter Verwendung von diversen Beispielen, wurden die unterschiedliche Einsatzgebiete und Anwendungsbereiche beleuchtet.

Aus der Auseinandersetzung mit den Besonderheiten und den nachteiligen Punkten des Verfahrens wurden Vorschläge erläutert, diese mit diversen Maßnahmen einzudämmen. Es entstand daraus mit der Untersuchung von Kurzfolgen eine neuartige nutzbare Idee für die praktische Anwendung. Damit lassen sich Signalmodelle auf die Wahrscheinlichkeit der Ausgabe von wenigen nacheinander auftretenden Signale untersuchen und auf welchem Entwicklungspfad das geschehen kann. Durch die Betrachtung des zeitlichen Abstandes dieser Signal einer Kurzfolgen wird nicht nur die Wahrscheinlichkeit des Auftretens der Signal, sondern auch die Zeit zwischen den Ereignissen mit einbezogen. Je nach Bedeutung der Folge gibt die Wahrscheinlichkeit Aufschluss über beispielsweise katastrophale oder gewinnbringende Ereignisse, die für das abgebildeter Modell eintreten können.

Aufgrund der erzielten Ergebnisse der Arbeit und der Komplexität der über viele Jahre hinweg erarbeiteten Verfahren und Ansätze für HMM, bietet die noch junge Methode der Proxel noch viel Potential für die weitere Erforschung. Ich kann mit meinen gewonnenen Erfahrungen zu diesem Thema mit großer Zuversicht zu einem zukünftigen Interesse ermutigen. Es zeigen sich hierfür noch einige Ansatzpunkte und Ideen, welche ich zuvor schon in geringem Masse angeschnitten habe, die es, wie in 5.3 beschrieben, zu betrachten lohnt.

## 5.2 offene Fragen

Es folgen im Weiteren verschieden Punkte, welche in möglichen Anschlussarbeiten einer näherer Untersuchung unterzogen werden können.

Der größte Teil, der in dieser Arbeit verwendeten Beispiel, ist fiktiver Natur und basiert einzig und allein auf dem Wissensstand und den Erfahrungen des Autors bzw. literarischen Quellen. Es wäre also von größtem Interesse eine industriell wertvolle Fragestellung analysieren zu können.

Die Bewertung der konkreten Verwendung des angepassten Algorithmus im Bereich der Sprach- und Mustererkennung fällt durch das Fehlen von umfangreichen Expertenwissen zu diesem Thema schwer. Dennoch erachteten diverse Paper und Dokumente [HMM04], [Welf04] die angesprochenen Einschränkungen der HMM als durchaus nachteilig für praxisrelevante Systeme.

Weiterhin kann die fehlende Implementierung eines Proxel-basierten Petri Netz Simulator erwähnt werden. Dieser war für die Untersuchungen in der Arbeit nicht als Ziel festgelegt. Dennoch sollten mit dieser Voraussetzung und einiger in der Praxis verwendeten Modelle noch genauere Untersuchung der Eigenschaften und Anwendungszwecke

durchzuführen sein.

Der Vorschlag für die manuelle Anpassung der Parameter des SPN ähnlich dem dritten Analyseverfahren der HMM und deren entstand aus den in 4 beschriebenen Gründen und unterlag keiner konkreten Prüfung. Diese Methode entfernt sich auch stark von der ursprünglichen Intension des Ansatzes der HMM, ein Signalmodell mit seinen Parametern induktiv entwickeln zu können. Ein Signalmodell sollte eine bestimmte Symbolfolge maximal wahrscheinlich erzeugen. Das beschriebene Prozedere ist mit den Ergebnissen dieser Arbeit praktisch durchzuführen. Es gibt quantitative Verfahren zur Analyse von SPN [DESS05]. Diese analysieren die Netze in ihrer Struktur und ermitteln, welche Einflüsse bestimmte Komponenten auf das Verhalten der Netze haben. Dennoch sind nur vage Aussagen darüber zu machen, welche Parameter des SPN für eine bessere Anpassung an die Symbolfolge geändert werden müssen und in welchem Umfang.

### 5.3 Ausblicke

Wie bereits an mehreren Stellen bemerkt, schätze ich das weitere Potenzial der Proxelmethode für die entstandene Analyse von Signalmodellen sehr hoch ein. Aufgrund der heutigen Aktualität des Ansatzes der Proxel und der zu erwartenden stetigen Weiterentwicklung des Verfahrens, stehen in dieser Richtung viele lohnenswerte und interessante Forschungsthemen zur Verfügung. Diese Forschungen unterstützen die Analyse von Signalmodellen auf verschiedene Weisen. Beispielsweise tragen Ansätze innovativer Datenstrukturen für Proxel zur Reduzierung des Speicher- und Berechnungsaufwands bei und ermöglichen die Analyse umfangreicherer Modelle.

Der folgende Abschnitt beschreibt noch einige Empfehlungen und Anregungen für weitere Themenbereiche, die diese Arbeit anschnidet oder Voraussetzungen dafür liefert. Die Auseinandersetzung mit diesen Punkten war jedoch aus Gründen von Zeitmangel nicht möglich.

Diese Arbeit basiert für den Teil der Übertragung der Entwicklungsmöglichkeiten der Petri Netze auf das Proxelverfahren auf einer zuvor angefertigten Arbeit [Wick04]. Der Inhalt der Arbeit klärt detailliert die Proxel-basierte Simulation von Petrinetzen und geht auf deren Verhalten und Problemstellungen ein. Zusätzlich dazu wird auch ein Ansatz für die Verwendung von variablen Zeitschritten erläutert.

Bei der Untersuchung eines Signalmodells, werden Proxel mit einem sehr geringen Anteil an der gesamten Sequenzwahrscheinlichkeit betrachtet. Es können durch die variable Zeitschrittweite mehrere Intervalle zusammengefasst werden. In dieser Spanne können Symbole ausgegeben werden. Es ist also vorher zu prüfen, welche Symbole in der weiteren Entwicklung erzeugt werden können. Mit dieser Information kann entschieden werden, ob keine ausschlaggebenden Entwicklungen des Systems durch die Zusammenfassung vernachlässigt werden. Diese wäre beispielsweise für die Ausgabe von mehreren Null-Symbolen der Fall.

Es stellen sich demzufolge Fragen, ob und unter welchen Bedingungen diese variable Schrittweite für Signalmodelle sinnvoll ist. Weiterhin ist zu untersuchen, welche Zusammenfassungen von Symbolen und Entwicklungswegen vollzogen werden können.

Eine weitere interessant erscheinende Idee die dritte Fragestellung für HMM auch mit dem Proxelverfahren zu analysieren, ist die Verwendung von Phasentypverteilungen [Isen05]. Um die Parameter der Zustandsübergänge eines HMM zu schätzen, wird der Baum-Welch-Algorithmus, wie in 2.3.2 beschrieben, verwendet. Dieser Methode ermittelt die Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Zustandsübergänge. Daraus lässt sich ein Markov Modell erstellen. Mit diesen Wahrscheinlichkeitswerten ist es jedoch nicht möglich auf die Parameter allgemeiner Verteilungsfunktionen zu schließen. Aus diesem Grund könnten nur Petri Netze parametrisiert werden, die ausschließlich exponentiell-verteilte Transitionen verwenden. Für diese Netze besteht aber kein Mehrwert gegenüber den HMM. Weiterhin gibt es bei der Ermittlung dieser Schätzungen keinen Berechnungsvorteil.

Dennoch gibt es eine Möglichkeit einen Zusammenhang zwischen den Wahrscheinlichkeiten der Zustandsübergänge und den Parametern allgemeiner Verteilungsfunktionen herzustellen. Mit Hilfe der Aneinanderreihung von mehreren Zuständen mit exponentiell-verteilten Übergängen, kann das Verhalten von allgemeinen Verteilungsfunktionen approximiert werden. Diese „kleinen“ Markov-Ketten nennt man Phasentypverteilungen.

Angenommen die dritte Fragestellung der HMM ist in das Proxelverfahren integriert, so würde das Baum-Welch Verfahren, wie in 2.3.2 beschrieben, für das Training eines Signalmodells an eine Signalfolge genutzt werden müssen. Beginnen kann der Algorithmus allerdings mit einem Petri Netz, welches als initiales Modell für das dritte Verfahren verwendet wird. Die allgemeinen Verteilungsfunktionen des Petri Netz können mit Hilfe der Phasentypverteilungen mit markovschen Zustandsübergängen ersetzt werden. Das ganze Petri Netz liegt nun als Hidden Markov Modell vor. In den einzelnen Annäherungsschritte des Gradientenverfahren (Baum-Welch) wird das Markov Modell sukzessive an die Signalfolge angepasst. Nachdem ein bestimmtes Optimum erreicht ist, können durch die Betrachtung des Markov Modells Phasentypverteilungen identifiziert werden. Diese können dann durch allgemeine Verteilungsfunktionen ersetzt werden. Daraus kann ein SPN entworfen werden, welches die für das Training verwendete Signalfolge maximal wahrscheinlich erzeugt.

Es muss jedoch noch evaluiert werden, wie die Signalausgaben auf die Phasentypverteilungen übertragen werden. Im Rückschritt besteht die ähnliche Aufgabe, mit der Ersetzung der identifizierten Phasentypverteilungen die Signalausgaben wiederum auf die allgemein verteilten Transitionen anzupassen.

Die hier angedeuteten Ausblicke auf mögliche Anschlußthemen dieser Arbeit, geben einen Eindruck über das Potential dieses Ansatzes. Mit der Verwendung von stochastischen Petri Netzen zur Beschreibung von Signalmodellen, ist eine weitere Möglichkeit der Nutzung des schon oft erweiterten Konzeptes entstanden. Das noch junge Proxelverfahren liefert eine Basis dafür, Analysen über so spezifizierte Signalmodelle durchzuführen. Meiner Einschätzung nach erwarte ich für die Zukunft weitere Verbesserungen der Analyse von Signalmodellen durch die Proxelmethode und eine breitere Anwendung der Abbildung von Problemstellungen auf Signalmodelle. Dazu haben die Beispiele der Experimente schon Ideen aufgezeigt. Das unterstützt die Erwartung, Signalmodelle auch ohne detailliertes Expertenwissen für viele praktische Anwendungsbereiche zur Verfügung stellen zu können.

# 6 Anhang

## 6.1 Beispiel zum Forward-Backward Algorithmus

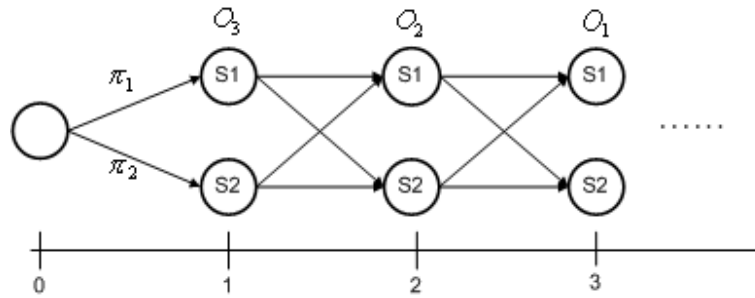


Abbildung 6.1: Modell mit zwei Zuständen

Übergangswahrscheinlichkeiten

	$S_1$	$S_2$	
$S_1$	0.7	0.3	(6.1)
$S_2$	0.5	0.5	

Symbolwahrscheinlichkeiten

	$O_1$	$O_2$	$O_3$	
$S_1$	0.6	0.1	0.3	(6.2)
$S_2$	0.1	0.7	0.2	

Das folgende Beispiel verdeutlicht die Berechnung des  $\alpha$ -Terms. Die Tabelle 6.3 zeigt die Werte der Berechnung der Forward-Variable der ersten 3 Zeitschritte für ein System mit zwei möglichen Zuständen  $S_1$  und  $S_2$ . Es soll die Wahrscheinlichkeit der Sequenz  $(O_3, O_2, O_1)$  ermittelt werden.

	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$
$\alpha_1(t)$	1.0 → $\pi_1 = 1.0$	0.21 → $\alpha_1(1)a_{11}b_{13} + \alpha_2(1)a_{21}b_{23}$	0.0462 → $\alpha_1(2)a_{11}b_{12} + \alpha_2(2)a_{21}b_{12}$
$\alpha_2(t)$	0.0 → $\pi_2 = 0.0$	0.09 → $\alpha_1(1)a_{12}b_{13} + \alpha_2(1)a_{22}b_{23}$	0.0378 → $\alpha_1(2)a_{12}b_{22} + \alpha_2(2)a_{22}b_{22}$
$\alpha_t$	1.0 → $\alpha_1(1) + \alpha_2(1)$	0.3 → $\alpha_1(2) + \alpha_2(2)$	0.084 → $\alpha_1(3) + \alpha_2(3)$

(6.3)

Wie für den oben erläuterten Induktionsbeginn ergibt sich das Ergebnis für die erste Beobachtung  $\alpha_1$  durch:

- die Wahrscheinlichkeit, das sich das System im Zustand  $S_1$  zu befindet  $\pi_1$  und dort das Symbol  $O_1$  aus gibt ( $\alpha_1(1)$ ), plus der Wahrscheinlichkeit, das sich das System im Zustand  $S_2$  zu befindet  $\pi_2$  und dort das Symbol  $O_1$  aus gibt ( $\alpha_1(2)$ ). Die anderen Zellen zeigen die folgenden Teilterme für die Berechnung der Induktionsschritte der nächsten Zeitschritte.

## 6.2 Beispiel zum Viterbi Algorithmus

Die Tabelle 6.4 zeigt die Werte der Berechnung des Viterbi-Algorithmus der ersten 3 Zeitschritte für das System oben beschriebene Modell und dessen Parametern.

	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$
$\alpha_1(t)$	1.0 → $\pi_1 = 1$	0.21 → $\alpha_1(1)a_{11}b_{13} + \alpha_2(1)a_{21}b_{23}$	0.0462 → $\alpha_1(2)a_{11}b_{12} + \alpha_2(2)a_{21}b_{12}$
$\alpha_2(t)$	0.0 → $\pi_2 = 0$	0.09 → $\alpha_1(1)a_{12}b_{13} + \alpha_2(1)a_{22}b_{23}$	0.0378 → $\alpha_1(2)a_{12}b_{22} + \alpha_2(2)a_{22}b_{22}$
$max(\alpha_N(t))$	$\alpha_1$	$\alpha_1$	$\alpha_1$

(6.4)

Das wahrscheinlichste Pfad, der die Beobachtungsfolge für die ersten 3 Zeitschritte erzeugt, resultiert dadurch als:  $S_1, S_1, S_1$ . Der Viterbi Algorithmus ist ähnlich der Forward-Berechnung zu implementieren. Der Hauptunterschied besteht im Maximierungsschritt 2.8 als Ersetzung zur Summierung in 2.3. Damit ergibt sich ein ähnlicher Berechnungsaufwand. Die Erarbeitung dieser beiden Algorithmen und deren Ergebnisse ebnet den Weg für das im folgenden Abschnitt erläuterte dritte Analyseverfahren der HMM. Dabei müssen sukzessive Modelle auf die oben beschriebenen Kriterien untersucht werden, um Schritt für Schritt ein an die Sequenz optimaler angepasstes Modell zu erzeugen.

### 6.3 Ergebnisse der Berechnung von 5 Zeitschritten

Die Tabelle 6.5 zeigt die Wahrscheinlichkeiten der wahrscheinlichsten Entwicklungspfade des Beispiels aus Abschnitt 3.1.4.

	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$	$t = 4$	$t = 5$
$\alpha_1(t)$	0.14	0.0228	0.001868	0.00043960	0.0000617432
$\alpha_2(t)$	0.02	0.026	0.00632	0.00029016	0.0000451056
$\alpha_3(t)$	0.02	0.0208	0.0	0.00030884	0.0000836484
$\alpha(t)$	0.18	0.0696	0.008188	0.0010386	0.0001904972

(6.5)

### 6.4 Variablen aus Abbildung 2.3

<i>Var</i>	<i>→ Zusammenhang</i>
$x$	$\rightarrow T1(0) * \Delta t$
$y$	$\rightarrow 1.0 - (x + z)$
$z$	$\rightarrow T3(0) * \Delta t$
$a$	$\rightarrow x - b$
$b$	$\rightarrow x * T2(0) * \Delta t$
$m$	$\rightarrow y * T1(dt) * \Delta t$
$o$	$\rightarrow y - (m + p)$
$p$	$\rightarrow y * T3(dt) * \Delta t$
$e$	$\rightarrow z * T4(0) * \Delta t$
$f$	$\rightarrow z - e$

(6.6)

# Literaturverzeichnis

- [Bau66] BAUM, E. L. ; PETRIE, T.: *Statistical inference for probabilistic functions of finite state Markov chains*, 1966
- [Bau67] BAUM, E. L. ; EGON, J. A.: *An inequality with applications to statistical estimation for probabilistic functions of a Markov process and to a model for ecology*, 1967
- [Hor02] HORTON, Graham: *A new paradigm for the numerical simulation of stochastic petri nets with general firing times*, Otto-von-Guerike Universität Magdeburg, Fakultät für Informatik, Paper, 2002
- [ITS] HORTON, Graham: *Introduction to Simulation* Vorlesungsmaterialien. Webseite: <http://www.sim-md.de/its/index.html>
- [DESS05] BANKS, CARSON, NELSON, AND NICOL *Discrete-Event System Simulation, 4th Edition*, Prentice-Hall, 2005
- [Laz03] LAZAROVA-MOLNAR, Sanja; HORTON, Graham: *Proxel-Based Simulation of Stochastic Petri Nets Containing Immediate Transitions*, Otto-von-Guerike Universität Magdeburg, Fakultät für Informatik, Paper, 2003
- [IEEE89] RABINER, Lawrence R.: *A Tutorial on Hidden Markov Models and Selected Applications in Speech Recognition*, IEEE, 1989
- [BGdMT] BOLCH, GREINER, DE MEER, TRIVEDI *Queueing Systems and Markov Chains*
- [Gold03] GOLDEN, Richard. *Präsentation zu Hidden Markov Modellen*. PPT : [www.utdallas.edu/golden/problang/lecturenotes/](http://www.utdallas.edu/golden/problang/lecturenotes/) 2003
- [Welf04] WELF, Walter: *Hidden Markov Modelle und Künstlich Neuronale Netze*, Universität Ulm, Fakultät für Informatik, Abteilung Neuroinformatik, Sem., 2004
- [Gre] CORMEN, Thomas H.; LEISERSON, Charles; RIVEST, Ronald L.; STEIN, Clifford *Introduction to Algorithms*, MIT Press, 2nd edition, 2001
- [HMM04] PRÄSENTATION *Hidden Markov Modelle 2004*. Dokument: <http://www.nue.tu-berlin.de/forschung/projekte/mpeg7/Vorlesung/VL9.pdf>



- [NN02] KRUSE, Rudolf: *Vorlesung Neuronale Netze* Vorlesungsmaterialien. Webseite: [http://fuzzy.cs.uni-magdeburg.de/welcome\\_d.html](http://fuzzy.cs.uni-magdeburg.de/welcome_d.html)
- [IDA04] BORGELT, Christian: *Vorlesung Intelligente Datenanalyse* Vorlesungsmaterialien. Webseite: [http://fuzzy.cs.uni-magdeburg.de/welcome\\_d.html](http://fuzzy.cs.uni-magdeburg.de/welcome_d.html)
- [Wick04] WICKBORN, Fabian: *Entwicklung eines erweiterten Prozel-basierten Petri-Netz-Simulators*, Otto-von-Guerike Universität Magdeburg, Fakultät für Informatik, Dilomarbeit, 2004
- [Isen05] ISENSEE, Claudia; HORTON, Graham: *Approximation of Discrete Phase-Type Distributions*, Otto-von-Guerike Universität Magdeburg, Fakultät für Informatik, Paper, 2005

# Selbstständigkeitserklärung

Hiermit erkläre ich, daß ich die vorliegende Arbeit selbständig und nur mit erlaubten Hilfsmitteln angefertigt habe.

Magdeburg, den 31. Juli 2005

Thomas Simon